数 学 学 报

ACTA MATHEMATICA SINICA

第9卷　　第2期

Vol. 9　　No. 2

1959

中国数学会編輯

科学出版社出版

数　学　学　报

第9卷　　第2期

目　录

論篩法及其有关的若干应用——殆素数的分布問題……王　元（87）
求复数根的路斯法……赵訪熊（101）
关于解析函数的一个唯一性定理及其应用……邹新堤（114）
模态系統与蘊涵系統……莫紹揆（121）
Saks 空間及其在綫性算子理論中的应用……W. Orlicz（143）
論空間 l^a 与 L^a 的一些推广……W. Orlicz（150）

方程組 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{0\le i+k\le 2} a_{ik}x^iy^k \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{0\le i+k\le 2} b_{ik}x^iy^k \end{cases}$ 的极限环綫的位置……董金柱（156）

陣的模数最大的特征根的幅角……耿　济（170）
陣的特征根的限界（II）……耿　济（174）
环面上具有一个奇点的积分曲綫分布之拓扑結构……李文鏞（181）
某些芬斯拉空間的对称性質……忻鼎稼（191）
富里埃級数的絕对收斂……謝庭藩（199）
在平衡点附近 $\dfrac{dx}{dt} = P$，$\dfrac{dy}{dt} = Q$ 出現三个极限环的例子
（P，Q 为二次多項式）……秦元勳等（213）

ACTA MATHEMATICA SINICA Vol. 9, No. 2

CONTENTS

On Sieve Methods and Some of Their Applications……*Wang Yuan*（100）
Routh's Method for Finding Complex Roots……*Chao, F. H.*（113）
On the Uniqueness Theorem of Analytic Functions and Its Applications……*Chou Hsin-ti*（119）
The Modal Systems and Implication Systems……*Moh Shaw-kwei*（141）
Saks-space and Its Application in the Theory of Linear Operator……*W. Orlicz*（143）
On the Generation of l^a-space and L^a-space……*W. Orlicz*（150）
Положения предельных циклов системы дифференциальных уравнений

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{0\le i+k\le 2} a_{ik}x^iy^k \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{0\le i+k\le 2} b_{ik}x^iy^k \end{cases}$ …… Тунг Чин-чу（168）

The Argument of the Maximum Absolute Value of Characteristic Roots of a Matrix……*G. Gun*（173）
Limits for the Characteristic Roots of a Matrix (II)……*G. Gun*（179）
The Topological Structure of the Distribution of the Integral Curves with One Singular Point on the Torus……*Lee Wen-yung*（190）
On the Symmetric Properties in Some Finsler Spaces……*Shing Ding-kia*（198）
Об Абсолютности сходимости рядов фурье……*Ше Дин-фан*（211）
Concrete Examples of Existence of Three Limit Cycles for the System $\dfrac{dx}{dt} = X_2(x,y)$, $\dfrac{dy}{dt} = Y_2(x,y)$……*Chin Yuan-shun et al.*（225）

第9卷 第2期　　数学学报　　Vol. 9, No. 2
1959年6月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　June, 1959

論篩法及其有关的若干应用

——殆素数的分布問題——

王　元
(中国科学院数学研究所)

1. 結果的陈述

本文的宗旨在于証明作者在[1]内所提及的全部結果，現在将本文的結果詳述于下：

定理 1. 命 $F(x)$ 表一无固定素因子的 k 次既約整值多項式．命

$$n = \begin{cases} k+1, & 若 1 \leqslant k \leqslant 5; \\ k+w, & 若 k > 5; \end{cases} \tag{1}$$

此处 w 是适合下面不等式的最小正整数

$$w+1 \geqslant \frac{5.64527}{4.8396} + \frac{3.65}{4.8396} \log \frac{5k-w}{w+5}. \tag{2}$$

則在叙列 $\{F(x)\}$ 中存在无限多个不超过 n 个素数的乘积．

例如存在无限多个 x，使 x^3+2 的素因子个数(包括相同的与相异的)不多于 4．

与此相类似，有

定理 2. 設 k 为一正整数，命 n 适合(1)及(2)，則当 x 充分大时，区間 $x < m \leqslant x + x^{\frac{1}{k}}$ 中恆有一个不超过 n 个素数的乘积．

一般說来，对于某些特定的 k (定理 2 中 k 不一定是整数)，定理 1 及 2 还可以略为改善一些，例如得到：

定理 3. 当 x 充分大时，則

(i) 区間 $x < n \leqslant x + x^{\frac{10}{17}}$ 中恆有一个不超过 2 个素数的乘积；

(ii) 区間 $x < n \leqslant x + x^{\frac{20}{49}}$ 中恆有一个素因子个数不超过 3 的整数；

(iii) 区間 $x < n \leqslant x + x^{\frac{1}{100+2/9}}$ 中恆有一个不多于 103 个素数的乘积．

本文并不需要复杂的数值計算，所有的計算过程都在文章中給予詳細的交代．但关于以上問題的历史及其发展在此都从略了(讀者可以参看 Brun[2], Rademacher[3], Ricci[4,5], Kuhn[6,7], Линник[8])．

本文以 $p, p', p'', \cdots; p_1, p_2, \cdots$ 表示素数，不再一一声明了．

最后，作者衷心感謝华罗庚教授的鼓励与帮助．

2. 几条引理

以下皆命 $F(x)$ 为无固定素因子的 k 次既約整值多項式，当 $p > k$ 时，以 $w(p)$ 表示

同余式

$$F(x) \equiv 0 \pmod p \quad (1 \leqslant x \leqslant p)$$

的解数,当 n 无平方因子且 n 的素因子皆大于 k 时,命 $w(n) = \prod_{p \mid n} w(p)$.

引 1. (Nagell[9])

$$R(x) = \sum_{k<p\leqslant x} \frac{w(p)}{p} \log p = \log x + O(1),$$

$$S(x) = \sum_{k<p\leqslant x} \frac{w(p)}{p} = \log\log x + \rho_F + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

$$T(x) = \prod_{k<p\leqslant x}\left(1 - \frac{w(p)}{p}\right) = \frac{\mu_F}{\log x} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right),$$

此处 ρ_F, μ_F 及与"O"有关的常数仅与 $F(x)$ 有关.

引 2. 当 n 无平方因子及 n 的素因子皆大于 k, $w(n) \neq 0$ 时,命 $f(n) = \prod_{p \mid n} f(p)$, 此处 $f(p) = \frac{p}{w(p)} - 1$. 则

$$\sum_{\substack{n\leqslant z \\ p \mid n \Rightarrow p>k \\ w(n)\neq 0}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} = \alpha_F \log z + o(\log z),$$

此处 $\alpha_F = \prod_{p\leqslant k} \frac{p-1}{p} \prod_{p>k} \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{1)}}{\left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)}$, 与"$o$"有关的常数仅与 $F(x)$ 有关.

证: 由于 $w(p) \leqslant k$, 故当 n 无平方因子时, $w(n) \leqslant k^{\Omega(n)} = O(n^\varepsilon)$, 此处 $\Omega(n)$ 表示 n 的不同素因子的个数,而 ε 为任意正数,与"O"有关的常数仅与 ε 及 $F(x)$ 有关. 因此级数 $\sum_{\substack{n=1 \\ p \mid n \Rightarrow p>k \\ w(n)\neq 0}}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{f(n) n^s}$ 当 $s > 0$ 时絶对收斂,故当 $s > 0$ 时

$$\sum_{\substack{n=1 \\ p \mid n \Rightarrow p>k \\ w(n)\neq 0}}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{f(n) n^s} = \prod_{\substack{p>k \\ w(p)\neq 0}} \left(1 + \frac{1}{f(p)p^s}\right) =$$

$$= \prod_{p>k}\left[\left(1 + \frac{w(p)}{(p - w(p))p^s}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right)\right] \prod_{p\leqslant k}\left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right) \cdot \zeta(1+s) \sim$$

$$\sim \prod_{p>k} \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)} \prod_{p\leqslant k} \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{当 } s \to 0^+).$$

---

1) 由 Mertens 定理得 $\prod_{p>k} \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\left(1-\frac{w(p)}{p}\right)} = \lim_{\xi\to\infty} \frac{\prod_{k<p\leqslant\xi}\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\prod_{k<p\leqslant\xi}\left(1-\frac{w(p)}{p}\right)} = \frac{e^{-\gamma}}{\mu_F \prod_{p\leqslant k}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$, 故 $\alpha_F = (e^\gamma \mu_F)^{-1}$, 其中 γ 表示 Euler 常数.

另一方面，記 $\alpha(z)=\sum_{\substack{n\le z\\ p|n\Rightarrow p>k\\ w(n)\neq 0}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$. 則当 $s>0$ 时有

$$\sum_{\substack{n=1\\ p|n\Rightarrow p>k\\ w(n)\neq 0}}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{f(n)n^s}=\int_1^{\infty}z^{-s}\,d\alpha(z)=\int_0^{\infty}e^{-st}\,d\alpha(e^t),\qquad s>0$$

故得 $\alpha(z)=\alpha_F\log z(1+o(1))$. (参看[10]).

引 3. 若 $1<\alpha<\beta$ 为固定两正数，則

$$\sum_{k<x^{\frac{1}{\beta}}<p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{w(p)}{p\log\frac{x}{p}}=\log\frac{\beta-1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{\log x}+O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right),$$

此处与"O"有关的常数仅与 $F(x)$ 有关.

証：由引 1 可知 $R(n)=\log n+r_n$, $r_n=O(1)$. 故

$$\sum_{k<x^{\frac{1}{\beta}}<p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{w(p)}{p\log\frac{x}{p}}=\sum_{k<x^{\frac{1}{\beta}}<n\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{R(n)-R(n-1)}{\log n\log\frac{x}{n}}=$$

$$=\sum_{k<x^{\frac{1}{\beta}}<n\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{\log n-\log(n-1)}{\log n\log\frac{x}{n}}+\sum_{k<x^{\frac{1}{\beta}}<n\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{r_n-r_{n-1}}{\log n\log\frac{x}{n}}=\Sigma_1+\Sigma_2;$$

$$\Sigma_1=\sum_{k<x^{\frac{1}{\beta}}<n\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{n\log n\log\frac{x}{n}}+O(x^{-\frac{1}{\beta}})=$$

$$=\int_{x^{\frac{1}{\beta}}}^{x^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{dt}{t\log t\log\frac{x}{t}}+O(x^{-\frac{1}{\beta}})\left(\text{置变换 }\log t=\frac{\log x}{z+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\frac{dz}{z}+O(x^{-\frac{1}{\beta}})=\frac{1}{\log x}\log\frac{\beta-1}{\alpha-1}+O(x^{-\frac{1}{\beta}}),$$

$$\Sigma_2=\sum_{k<x^{\frac{1}{\beta}}<n\le x^{\frac{1}{\alpha}}}r_n\left(\frac{1}{\log n\log\frac{x}{n}}-\frac{1}{\log(n+1)\log\frac{x}{n+1}}\right)+O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{\log x}\sum_{n>x^{\frac{1}{\beta}}}\frac{1}{n\log^2 n}\right)+O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)=O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right);$$

引理証完.

3. 定 理 A

命 $s_i=\sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{k}{q_i^l}\right]\ (1\le i\le m)$, 此处 $q_1,\cdots,q_m$ 为不超过 k 的全体素因子，記

$K=\prod_{i=1}^{m} q_i^{t_i+1}$. 給予一組整数

$$a, K;\quad 1\leqslant a_{i1},\cdots, a_{iw(p_i)}\leqslant p_i^2\quad (i=1,2,\cdots), \tag{w}$$

适合 $a_{ij_1}\not\equiv a_{ij_2}\ (\mathrm{mod}\ p_i)\ (j_1\neq j_2)$, 此处 $p_1<p_2<\cdots$ 为大于 k 且使 $w(p)\neq 0$ 的全体素数 ($w(p)$ 的定义見 § 2). 命 $P_w(x,\xi)$ 为适合下面条件的整数的个数

$$1\leqslant n\leqslant x,\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ K),\ n\not\equiv a_{ij}\ (\mathrm{mod}\ p_i)\ (1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant w(p_i)). \tag{3}$$

此处 p_r 为不超过 ξ 的最大素数.

由于 $w(p)\leqslant k$, 命 $a_{iw(p_i)+1}=a_{iw(p_i)+2}=\cdots=a_{ik}=a_{iw(p_i)}\ (i=1,2,\cdots)$. 当 $1\leqslant j\leqslant k$ 时,由孙子定理可知同余式组

$$n\equiv a_{ij}\quad (\mathrm{mod}\ p_i)\quad (1\leqslant i\leqslant r)$$

在区間 $1\leqslant n\leqslant p_1,\cdots,p_r$ 内有唯一的解,記之为 a_j. 因此适合条件(1)与适合下面条件的整数个数相同

$$1\leqslant n\leqslant x,\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ K),\ (n-a_1)\cdots(n-a_k)\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p_i)\ (1\leqslant i\leqslant r). \tag{4}$$

定理 A. 命 $c>0$, $P=\prod_{i=1}^{r} p_i$. 則对于任何給予的整数列 (w),下式一致成立

$$P_w(x,\xi)\leqslant \frac{x}{K\sum\limits_{\substack{m\leqslant \xi^c\\ m\mid P}}\frac{\mu^2(m)}{f(m)}}+O(\xi^{2c}\log^{6k}\xi),$$

此处 $g(1)=1$, 当 $w(p)\neq 0$ 及 $p>k$ 时, $g(p)=\frac{w(p)}{p}$. 当 n 无平方因子,且其素因子皆大于 k, 及 $w(n)=\prod_{p\mid n} w(p)\neq 0$ 时, $g(n)=\prod_{p\mid n} g(p)$, $f(n)=\frac{1}{g(n)}\prod_{p\mid n}(1-g(p))$.

証: 当 $n\mid P$ 时,命 $\lambda_n=\frac{\mu(n)}{g(n)f(n)}\sum\limits_{\substack{m\leqslant \xi^c/n\\ (m,n)=1\\ m\mid P}}\frac{\mu^2(m)}{f(m)}\Big/S$, 其中 $S=\sum\limits_{\substack{n\leqslant \xi^c\\ n\mid P}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$. 則

$$P_w(x,\xi)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ K)\\ ((n-a_1)\cdots(n-a_k),\,P)=1}}1\leqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ K)}}\Bigg(\sum_{\substack{d\mid(n-a_1)\cdots(n-a_k)\\ d\mid P}}\lambda_d\Bigg)^2=$$

$$=\sum_{\substack{d_1\leqslant \xi^c\\ d_1\mid P}}\sum_{\substack{d_2\leqslant \xi^c\\ d_2\mid P}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ K)\\ \{d_1,d_2\}\mid(n-a_1)\cdots(n-a_k)}}1=$$

$$=\frac{x}{K}\sum_{\substack{d_1\leqslant \xi^c\\ d_1\mid P}}\sum_{\substack{d_2\leqslant \xi^c\\ d_2\mid P}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{w(\{d_1,d_2\})}{\{d_1,d_2\}}+O\Bigg(\sum_{\substack{d_1\leqslant \xi^c\\ d_1\mid P}}\sum_{\substack{d_2\leqslant \xi^c\\ d_2\mid P}}|\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}|\,k^{\Omega(\{d_1,d_2\})}\Bigg)=$$

$$=\frac{x}{K}Q+R,$$

其中 $\{d_1,d_2\}$ 表示 d_1 与 d_2 的最小公倍.

$$Q=\sum_{\substack{d_1<\xi^c\\ d_1|P}}\sum_{\substack{d_2<\xi^c\\ d_2|P}}\lambda_{d_1},\lambda_{d_2}g(d_1)g(d_2)\sum_{d|(d_1,d_2)}f(d)=\sum_{\substack{d<\xi^c\\ d|P}}f(d)\Big\{\sum_{\substack{n<\xi^c\\ d|n|P}}\lambda_n g(n)\Big\}^2.$$

当 $n|P$ 时，

$$\lambda_n g(n)=\frac{1}{S}\sum_{\substack{m<\xi^c/n\\ m|P\\ (m,n)=1}}\frac{\mu(n)\mu^2(m)}{f(n)f(m)},$$

$$\sum_{\substack{n<\xi^c\\ d|n|P}}\lambda_n g(n)=\frac{1}{S}\sum_{\substack{n<\xi^c\\ d|n|P}}\sum_{\substack{m<\xi^c/n\\ (m,n)=1\\ m|P}}\frac{\mu(nm)\mu(m)}{f(nm)}=\frac{1}{S}\sum_{\substack{r<\xi^c\\ r|P}}\frac{\mu(r)}{f(r)}\sum_{d|n|r}\mu\Big(\frac{r}{n}\Big)=$$

$$=\frac{1}{S}\cdot\frac{\mu(d)}{f(d)}.$$

故

$$Q=\frac{1}{S},$$

$$R=O\Big(\Big(\sum_{\substack{d<\xi^c\\ d|P}}|\lambda_d|k^{\Omega(d)}\Big)^2\Big)=O\left(\left(\sum_{\substack{d<\xi^c\\ d|P}}\frac{|\mu(d)|k^{\Omega(d)}}{\prod\limits_{k<p<\xi^c}\Big(1-\frac{k}{p}\Big)}\right)^2\right)=$$

$$=O\Big(\log^{2k}\xi\cdot\Big(\sum_{d<\xi^c}k^{\Omega(d)}\Big)^2\Big)=O\Big(\log^{2k}\xi\cdot\Big(\sum_{n<\xi^c}d(n)^{\frac{\log k}{\log 2}}\Big)^2\Big)=$$

$$=O(\xi^{2c}\log^{6k}\xi),$$

其中 $d(n)$ 表示 n 的除数的个数．定理証完．

4．$P_w(x,\xi)$ 的上界計算

如前段之記号，命 $\xi>K$．当 $l<c\leqslant l+1$ 时 (l 为正整数)，有

$$\sum_{\substack{m<\xi^c\\ m|P}}\frac{\mu^2(m)}{f(m)}=\sum_{\substack{m<\xi^c\\ (m,K)=1\\ w(m)\neq 0}}\frac{\mu^2(m)}{f(m)}-\sum_{\substack{\xi<p<\xi^c\\ w(p)\neq 0}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{m<\xi^c/p\\ (m,Kp)=1\\ w(m)\neq 0}}\frac{\mu^2(m)}{f(m)}+\cdots+$$

$$+(-1)^l\sum_{\substack{\xi<p'<\cdots<p^{(l)}\\ p'\cdots p^{(l)}<\xi^c\\ w(p'\cdots p^{(l)})\neq 0}}\frac{1}{f(p')\cdots f(p^{(l)})}\sum_{\substack{m<\xi^c/p'\cdots p^{(l)}\\ (m,Kp'\cdots p^{(l)})=1\\ w(m)\neq 0}}\frac{\mu^2(m)}{f(m)}.$$

1°．当 $1\leqslant c\leqslant 2$ 时，取 $\xi=\dfrac{x^{\frac{1}{2c}}}{\log^{5k}x}$．又記 $2c=d$．則由于

$$\sum_{\substack{\xi<p<\xi^c\\ w(p)\neq 0}}\frac{1}{f(p)}-\sum_{\substack{\xi<p<\xi^c\\ w(p)\neq 0}}\frac{w(p)}{p}=\sum_{\substack{\xi<p<\xi^c\\ w(p)\neq 0}}\frac{w^2(p)}{p(p-w(p))}=O\Big(\frac{1}{\xi}\Big),$$

及引 2 得出

$$\sum_{\substack{m<\xi^c \\ m|P}} \frac{|\mu(m)|}{f(m)} = \sum_{\substack{m<\xi^c \\ (m,K)=1 \\ w(m)\neq 0}} \frac{|\mu(m)|}{f(m)} - \sum_{\substack{\xi<p<\xi^c \\ w(p)\neq 0}} \frac{w(p)}{p} \sum_{\substack{m<\xi^c/p \\ (m,K)=1 \\ w(m)\neq 0}} \frac{|\mu(m)|}{f(m)} + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right) =$$

$$= \alpha_F \log \xi^c - \sum_{\xi<p<\xi^c} \frac{w(p)}{p} \alpha_F \log\frac{\xi^c}{p} + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right) + o(\log\xi) =$$

$$= (2c - 1 - c\log c)\alpha_F \log\xi + o(\log\xi).$$

故由定理A可知

$$P_w(x, x^{\frac{1}{d}}) \leqslant P_w\left(x, \frac{x^{\frac{1}{d}}}{\log^{5k} x}\right) \leqslant \frac{x}{K\left(d-1-\frac{d}{2}\log\frac{d}{2}\right)\log\xi} \cdot \frac{1}{\alpha_F} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) =$$

$$= \Lambda(d)\frac{\mu_F x}{K\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right), \tag{5}$$

此处与"o"有关的常数仅与 $F(x)$ 有关,而

$$\Lambda(d) = \frac{d}{d-1-\frac{d}{2}\log\frac{d}{2}} e^\gamma \quad (2 \leqslant d \leqslant 4). \tag{6}$$

2°. 当 $2 < c \leqslant 3$ 时,取 $\xi = \dfrac{x^{\frac{1}{2c}}}{\log^{5k} x}$. 又記 $2c = d$. 则由定理A得知,对任何 $\varepsilon > 0$,皆存在仅与 $F(x)$ 及 ε 有关的常数 x_0, 当 $x > x_0$ 时,仍有(5)式,但

$$\Lambda(d) = \frac{d}{d-1-\frac{d}{2}\log\frac{d}{2}+\delta\left(\frac{d}{2}\right)-\varepsilon} e^\gamma \quad (4 \leqslant d \leqslant 6), \tag{7}$$

此处

$$\delta(c) = \lim_{\xi\to\infty} \sum_{\substack{\xi<p<p' \\ pp'<\xi^c \\ w(pp')\neq 0}} \frac{w(p)w(p')}{pp'} \log\frac{\xi^c}{pp'} \Big/ \log\xi \quad (c > 2). \tag{8}$$

当 $d > 6$ 时可以依次类推. 又当 $0 < d \leqslant 2$ 时,命 $\Lambda(d) = \Lambda(2)$, 显然(5)式正确.

5. $P_w(x, \xi)$ 的下界計算

为簡便計,引入記号

$$P_w(d; p_1, \cdots, p_s) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x \\ n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, d) \\ n\not\equiv a_{ij} (\mathrm{mod}\, p_i)\,(1\leqslant i\leqslant s,\ 1\leqslant j\leqslant w(p_i))}} 1, \quad P_w(d) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x \\ n\equiv a\,(\mathrm{mod}\, d)}} 1,$$

此处 $a_{ij_1} \not\equiv a_{ij_2} \pmod{p_i}$ $(j_1 \neq j_2)$, $k < p_1 < \cdots < p_s$ 且 $(d, p_1, \cdots, p_s) = 1$. 特别 $P_w(K; p_1, \cdots, p_r) = P_w(x, \xi)$.

本节的目的在于証明

定理 B. 对于任何 (w), 下式一致成立

$$P_w(x, x^{\frac{1}{6.5}}) > 6.4524 \frac{\mu_F x}{K \log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

此处与“O”有关的常数仅与 $F(x)$ 有关.

在証明之前，先述熟知的次引.

引 4. 給出任意一組整数 $r \geqslant r_1 \geqslant \cdots \geqslant r_n \geqslant 1$. 則

$$P_w(x, \xi) > \frac{x}{K} E - R,$$

此处

$$E = 1 - \sum_{\alpha \leqslant r} \frac{w(p_\alpha)}{p_\alpha} + \sum_{\alpha \leqslant r} \sum_{\substack{\beta \leqslant r_1 \\ \alpha > \beta}} \frac{w(p_\alpha)\, w(p_\beta)}{p_\alpha p_\beta} - + \cdots$$

$$- \overbrace{\sum_{\alpha \leqslant r} \sum_{\beta \leqslant r_1} \sum_{\gamma \leqslant r_1} \sum_{\delta \leqslant r_2} \cdots \sum_{\mu \leqslant r_n}}^{2n+1}_{\alpha > \beta > \cdots > \mu} \frac{w(p_\alpha)\, w(p_\beta) \cdots w(p_\mu)}{p_\alpha p_\beta \cdots p_\mu},$$

及

$$R = (1 + kr)(1 + kr_1)^2 \cdots (1 + kr_n)^2.$$

定理 B 的証明：取 ε 适当小为固定的正数，$h = \frac{55}{35} + \varepsilon$，則存在仅与 ε 及 $F(x)$ 有关的常数 $\delta_0 > k$，当 $\delta > \delta_0$ 时，由引 1 得知

$$\sum_{\delta < p < \delta^h} \frac{w(p)}{p} < \log(h + \varepsilon) < 0.452 = \tau,$$

$$\prod_{\delta < p < \delta^h} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)^{-1} < h + \varepsilon < 1.572 = \lambda.$$

取 $p_r = p_{r_1}$ 为不超过 $x^{\frac{1}{6.5}}$ 的最大素数，当 $2 \leqslant m \leqslant t + 1$ 时，p_{r_m} 为不超过 $x^{\frac{1}{6.5h^{m-1}}}$ 的最大素数，$p_{r_{t+1}}$ 具有性質 $p_{r_{t+1}}^{\frac{1}{h}} < \delta_0 \leqslant p_{r_{t+1}}$. 取 n 使 $2n > 2t + r_{t+1}$. 且命 $p_{r_m} = p_{r_{t+1}}$. $(t + 1 \leqslant m \leqslant n)$.

由引 4 与王元[11] 相类似即得出

$$P_w(x, \xi) > \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}[(n+1)\tau]^{2n+4}}{(2n+4)!}\right) \frac{x}{K} \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{w(p_i)}{p_i}\right) + O\left(x^{\frac{3}{6.5} + \frac{2}{6.5\left(\frac{20}{35} + \varepsilon\right)}}\right) >$$

$$> (1 - 0.0073193) \frac{x}{K} \prod_{k < p \leqslant x^{\frac{1}{6.5}}} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) >$$

$$> \frac{6.4524\, \mu_F x}{K \log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

定理証完.

6. 两 条 定 理

命 $\lambda(\alpha)$ 及 $\Lambda(\alpha)$ $(0<\alpha\leqslant 6.5)$ 为对于任何 (w) 及 α，使下式一致成立的非負递增函数

$$\lambda(\alpha)\frac{\mu_F x}{K\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right)\leqslant P_w(x, x^{\frac{1}{\alpha}})\leqslant \Lambda(\alpha)\frac{\mu_F x}{K\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right). \quad (9)$$

此处与“o”有关的常数仅与 $F(x)$ 有关. 这种函数是存在的(見 § 4—5).

定理 C_1. 給出 $\lambda(\alpha)$ 及 $\Lambda(\alpha)$ $(0<\alpha\leqslant 6.5)$ 有如(9)式所示的性質, 任意給予两数 $1<\alpha<\beta\leqslant 6.5$, 則下面定义的函数 $\lambda_1(\alpha)$ 与 $\Lambda_1(\alpha)$ 亦有性質(9).

$$\lambda_1(\alpha)=\begin{cases}\lambda(\beta)-\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda(z)\frac{dz}{z}, & \tau\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 6.5;\\ 0, & \alpha\leqslant\tau;\end{cases}$$

$$\Lambda_1(\alpha)=\Lambda(\beta)-\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\lambda(z)\frac{dz}{z}, \qquad \alpha\leqslant\beta\leqslant 6.5.$$

証: 取 x 使 $x^{\frac{1}{6.5}}>k$. 現在来求 $P_w(x, x^{\frac{1}{\alpha}})$ 的下界. 先将 $x^{\frac{1}{\beta}}$ 与 $x^{\frac{1}{\alpha}}$ 之間的素数排列为

$$p_t\leqslant x^{\frac{1}{\beta}}<p_{t+1}<\cdots<p_r\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}<p_{r+1}.$$

則可知 $P_w(x, x^{\frac{1}{\beta}})=P_w(x, p_t)$, $P_w(x, x^{\frac{1}{\alpha}})=P_w(x, p_r)$.

設 $x^{\frac{1}{\beta}}<p_{s+1}\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}$, 則 $P_w(x, p_s)$ 与 $P_w(x, p_{s+1})$ 之差为滿足下面条件之一的 n 的个数

$$1\leqslant n\leqslant x,\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ K),\ n\not\equiv a_{ij}\ (\mathrm{mod}\ p_i)\ (1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant w(p_i)), \quad (10)$$
$$n\equiv a_{s+1\,j}\ (\mathrm{mod}\ p_{s+1})\quad (1\leqslant j\leqslant w(p_{s+1})).$$

当 $1\leqslant i\leqslant s$, $1\leqslant l\leqslant w(p_i)$, $1\leqslant j\leqslant w(p_{s+1})$ 时, 同余式

$$m\,p_{s+1}+a_{s+1\,j}\equiv a\quad(\mathrm{mod}\ K)\quad(1\leqslant m\leqslant K),$$
$$m\,p_{s+1}+a_{s+1\,j}\equiv a_{il}\ (\mathrm{mod}\ p_i)\quad(1\leqslant m\leqslant p_i)$$

均在所示区間内有解, 且解是唯一的, 分别示之为 $\tilde a_{sj}$, $\tilde a_{sjil}$. 命

$$\tilde a_{sj}, K;\ \tilde a_{sjil}\ (1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant w(p_{s+1}), 1\leqslant l\leqslant w(p_i)),$$
$$a_{s+1\,l}\ (1\leqslant l\leqslant w(p_{s+1})). \quad (w_{sj})$$

則滿足(10)与滿足下式的整数个数相同.

$$1\leqslant m\leqslant\frac{x-a_{s+1\,j}}{p_{s+1}},\quad m\equiv\tilde a_{sj}\ (\mathrm{mod}\ K),\quad m\not\equiv\tilde a_{sjil}\ (\mathrm{mod}\ p_i)$$
$$(1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant w(p_{s+1}), 1\leqslant l\leqslant w(p_i)). \quad (11)$$

故得

$$P_w(x, p_{s+1})=P_w(x, p_s)-\sum_{j=1}^{w(p_{s+1})}P_{w_{sj}}\left(\frac{x-a_{s+1\,j}}{p_{s+1}}, p_s\right)=$$
$$=P_w(x, p_s)-\sum_{j=1}^{w(p_{s+1})}P_{w_{sj}}\left(\frac{x}{p_{s+1}}, p_s\right)+O(1).$$

陆續运用上式，则得

$$P_w(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) = P_w(x, x^{\frac{1}{\beta}}) - \sum_{v=t}^{r-1} \sum_{j=1}^{w(p_{v+1})} P_{w_{vj}}\left(\frac{x}{p_{v+1}}, p_v\right) + O(x^{\frac{1}{\alpha}}).$$

命 $n = [\sqrt{\log x}]$, $u_l = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} l\ (0 \leqslant l \leqslant n)$，由引 3 得知

$$T_l = \sum_{x^{\frac{1}{u_{l+1}}} < p_{v+1} \leqslant x^{\frac{1}{u_l}}} \sum_{j=1}^{w(p_{v+1})} P_{w_{vj}}\left(\frac{x}{p_{v+1}}, p_v\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{x^{\frac{1}{u_{l+1}}} < p_{v+1} \leqslant x^{\frac{1}{u_l}}} \sum_{j=1}^{w(p_{v+1})} P_{w_{vj}}\left(\frac{x}{p_{v+1}}, \left(\frac{x}{p_{v+1}}\right)^{\frac{\log p_{v+1}}{\log \frac{x}{p_{v+1}}}}\right) + O(x^{1-\frac{1}{\beta}}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{x^{\frac{1}{u_{l+1}}} < p \leqslant x^{\frac{1}{u_l}}} \Lambda(u_{l+1} - 1) \frac{x\, w(p)\, \mu_F}{Kp \log \frac{x}{p}} + o\left(x \sum_{x^{\frac{1}{u_{l+1}}} < p \leqslant x^{\frac{1}{u_l}}} \frac{w(p)}{p \log \frac{x}{p}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Lambda(u_{l+1} - 1) \frac{\mu_F x}{K \log x} \log \frac{u_{l+1} - 1}{u_l - 1} + o\left(\frac{x}{\log x} \log \frac{u_{l+1} - 1}{u_l - 1}\right) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

由于

$$\sum_{l=0}^{n-1} \Lambda(u_{l+1} - 1) \log \frac{u_{l+1} - 1}{u_l - 1} - \int_{\alpha-1}^{\beta-1} \Lambda(u) \frac{du}{u} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \int_{u_l-1}^{u_{l+1}-1} (\Lambda(u_{l+1} - 1) - \Lambda(u)) \frac{du}{u} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{n-1} \{\Lambda(u_{l+1} - 1) - \Lambda(u_l - 1)\} \log \frac{u_{l+1} - 1}{u_l - 1} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant l \leqslant n-1} \log \frac{u_{l+1} - 1}{u_l - 1} \sum_{v=0}^{n-1} (\Lambda(u_{v+1} - 1) - \Lambda(u_v - 1)) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right).$$

故得

$$P_w(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) \geqslant P_w(x, x^{\frac{1}{\beta}}) - \sum_{l=0}^{n-1} T_l + O(x^{\frac{1}{\alpha}}) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda(\beta) \frac{\mu_F x}{K \log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) - \sum_{l=0}^{n-1} \Lambda(u_{l+1} - 1) \log \frac{u_{l+1} - 1}{u_l - 1} \cdot$$

$$\cdot \frac{\mu_F x}{K \log x} + o\left(\frac{x}{\log x} \sum_{l=0}^{n-1} \log \frac{u_{l+1} - 1}{u_l - 1}\right) + O\left(\frac{nx}{\log^2 x}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\lambda(\beta) - \int_{\alpha-1}^{\beta-1} \Lambda(u) \frac{du}{u}\right) \frac{\mu_F x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

因此定义 $\lambda_1(\alpha)=\lambda(\beta)-\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda(u)\frac{du}{u}$，但当 $\lambda(\beta)-\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda(u)\frac{du}{u}<0$ 时，定义 $\lambda_1(\alpha)=0$. $\lambda_1(\alpha)$ 卽满足(9)式之左端. 另一边之証明相类似,明所欲証.

定理 C₂. 任意給定两数 $1<\alpha<\beta\leqslant 6.5$, 則对于任何 (w_{pl}), 下式一致成立

$$\sum_{x^{\frac{1}{\beta}}<p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{l=1}^{w(p)}P_{w_{pl}}\left(\frac{x}{p},\ x^{\frac{1}{\beta}}\right)\leqslant\left(\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda\left(\frac{\beta z}{z+1}\right)\frac{dz}{z}\right)\frac{\mu_F x}{K\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

此处 $\Lambda(z)$ 为具有(9)所述之性質的函数, 与"o"有关的常数仅与 $F(x)$ 有关.

証: 命 $n=[\sqrt{\log x}]$, $u_l=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}l-1\ (0\leqslant l\leqslant n)$. 則

$$T_l=\sum_{x^{\frac{1}{u_{l+1}+1}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l+1}}}\sum_{l=1}^{w(p)}P_{w_{pl}}\left(\frac{x}{p},\ x^{\frac{1}{\beta}}\right)=$$

$$=\sum_{x^{\frac{1}{u_{l+1}+1}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l+1}}}\sum_{l=1}^{w(p)}P_{w_{pl}}\left(\frac{x}{p},\ \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{\log x}{\beta\log\frac{x}{p}}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\Lambda\left(\frac{\beta u_{l+1}}{u_{l+1}+1}\right)\sum_{x^{\frac{1}{u_{l+1}+1}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l+1}}}\left[\frac{\mu_F x\,w(p)}{Kp\log\frac{x}{p}}+o\left(\frac{x}{p\log\frac{x}{p}}\right)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\Lambda\left(\frac{\beta u_{l+1}}{u_{l+1}+1}\right)\frac{\mu_F x}{K\log x}\log\frac{u_{l+1}}{u_l}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)+o\left(\frac{x}{\log x}\log\frac{u_{l+1}}{u_l}\right),$$

因此

$$\sum_{x^{\frac{1}{\beta}}<p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{l=1}^{w(p)}P_{w_{pl}}\left(\frac{x}{p},\ x^{\frac{1}{\beta}}\right)=\sum_{l=0}^{n-1}T_l=$$

$$=\frac{\mu_F x}{K\log x}\sum_{l=0}^{n-1}\Lambda\left(\frac{\beta u_{l+1}}{u_{l+1}+1}\right)\log\frac{u_{l+1}}{u_l}+O\left(\frac{nx}{\log^2 x}\right)+o\left(\frac{x}{\log x}\sum_{l=0}^{n-1}\log\frac{u_{l+1}}{u_l}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda\left(\frac{\beta z}{z+1}\right)\frac{dz}{z}\right)\frac{\mu_F x}{K\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

定理証完.

7. 集合 $\mathfrak{M}$ 及其若干性質

給出一組数 (w) 如 §3 所示. 命 u, v 为满足 $1<u<v\leqslant 6.5$ 的两数. 以 $\mathfrak{M}$ 表示适合下面条件的整数 n 的集合

$$1\leqslant n\leqslant x,\quad n\equiv a\ (\bmod K),\quad n\not\equiv a_{ij}\ (\bmod p_i)\ (1\leqslant i\leqslant s,\ 1\leqslant j\leqslant w(p_i)),\quad (12)$$
$$n\not\equiv a_{s+ij}\ (\bmod p_{s+i}^2)\quad (1\leqslant i\leqslant t-s,\ 1\leqslant j\leqslant w(p_{s+i})),$$

此处 $p_s\leqslant x^{\frac{1}{v}}<p_{s+1}$, $p_t\leqslant x^{\frac{1}{u}}<p_{t+1}$. 集合 $\mathfrak{M}$ 的元素个数記之以 $M(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{u}})$.

本段之目的在于証明

定理 D. 若函数 $\lambda(\alpha)$ 及 $\Lambda(\alpha)$ $(0<\alpha\leqslant 6.5)$ 为具有性质 (9) 的两函数，則 $\mathfrak{M}$ 中最多滿足下面 $t-s$ $(1\leqslant i\leqslant t-s)$ 組同余式

$$n\equiv a_{s+ij} \pmod{p_{s+i}} \quad (1\leqslant j\leqslant w(p_{s+i})) \tag{13$_i$}$$

中的 m 組的元素的个数不少于

$$\left(\lambda(v)-\frac{1}{m+1}\int_{u-1}^{v-1}\Lambda\left(\frac{vz}{z+1}\right)\frac{dz}{z}\right)\frac{\mu_F x}{K\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

此处与"o"有关的常数仅与 $F(x)$ 有关.

在証明之前，先証次之二引.

引 5.

$$P_w(x, x^{\frac{1}{v}})=M(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{u}})+O(x^{1-\frac{1}{v}})+O(x^{\frac{1}{u}}).$$

証：

$$P_w(x, x^{\frac{1}{v}})-M(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{u}})\leqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant t-s}\sum_{j=1}^{w(p_{s+i})}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a_{s+ij}(\mathrm{mod}\ p_{s+i}^2)}}1=$$

$$=O\left(\sum_{n>x^{\frac{1}{v}}}\frac{x}{n^2}\right)+O\left(\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{u}}}1\right)=O(x^{1-\frac{1}{v}})+O(x^{\frac{1}{u}}).$$

引 6. 存在諸整数列 (w_{il})，使 $\mathfrak{M}$ 中至少滿足同余式組 $(13)_i$ 中之 m 組的元素的个数不超过

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{t-s}\sum_{l=1}^{w(p_{s+i})}P_w\left(\frac{x}{p_{s+i}}, x^{\frac{1}{v}}\right).$$

証： 当 $1\leqslant i\leqslant t-s$ 时，$\mathfrak{M}$ 中滿足 $(13)_i$ 的元素全体吾人以 Γ_i 記之. 記同余式

$$p_{s+i}m+a_{s+il}\equiv a \pmod K \quad (1\leqslant m\leqslant K)$$

$$p_{s+i}m+a_{s+il}\equiv a_{uv} \pmod{p_u} \quad (1\leqslant m\leqslant p_u)$$

的解分別为

$$\tilde{a}_{il}\ (1\leqslant i\leqslant t-s,\ 1\leqslant l\leqslant w(p_{s+i})),$$

$$\tilde{a}_{iuvl}\ (1\leqslant i\leqslant t-s,\ 1\leqslant u\leqslant s,\ 1\leqslant v\leqslant w(p_u)),$$

記

$$\tilde{a}_{il},\ K;\quad \tilde{a}_{iuvl}\ (1\leqslant u\leqslant s,\ 1\leqslant v\leqslant w(p_u)). \tag{w_{il}}$$

显然当 $auv_1\not\equiv auv_2 \pmod{p_u}$ 时，

$$\tilde{a}_{iuv_1l}\not\equiv a_{iuv_2l} \pmod{p_u} \quad (1\leqslant u\leqslant s).$$

故 Γ_i 的元素的个数不超过

$$\sum_{l=1}^{w(p_{s+i})}P_{w_{il}}\left(\frac{x}{p_{s+i}}, x^{\frac{1}{v}}\right).$$

若 $\mathfrak{M}$ 中的元素，它至少滿足关系式 $(13)_i$ 中的 m 个，則至少属 m 个集合 Γ_i，故这种元素的总和不超过

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{t-s}\sum_{l=1}^{w(p_{s+i})} P_{w_{il}}\left(\frac{x}{p_{s+i}},\ x^{\frac{1}{v}}\right).$$

定理D的証明：由于引5，引6及定理C_2可知$\mathfrak{M}$中最多满足同余式組$(13)_i$中m个的元素的个数不少于

$$M(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{u}}) - \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{t-s}\sum_{l=1}^{w(p_{s+i})} P_{w_{il}}\left(\frac{x}{p_{s+i}},\ x^{\frac{1}{v}}\right) =$$

$$= P_w(x, x^{\frac{1}{v}}) - \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{t-s}\sum_{l=1}^{w(p_{s+i})} P_{w_{il}}\left(\frac{x}{p_{s+i}},\ x^{\frac{1}{v}}\right) + O(x^{1-\frac{1}{v}}) + O(x^{\frac{1}{u}}) =$$

$$= \left(\lambda(v) - \frac{1}{m+1}\int_{u-1}^{v-1}\Lambda\left(\frac{vz}{z+1}\right)\frac{dz}{z}\right)\frac{\mu_F x}{K\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

定理証完.

8. 主要定理的証明

命$\lambda(\alpha)$与$\Lambda(\alpha)$ $(0<\alpha\leqslant 6.5)$为使下式对(w)及α一致成立且仅有有限多个不連續点的非負遞增函数

$$\lambda(\alpha)\frac{\mu_F x}{K\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) \leqslant P_w(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) \leqslant \Lambda(\alpha)\frac{\mu_F x}{K\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right), \tag{9}$$

此处与“o”有关的常数仅与$F(x)$有关，而$\lambda(\alpha)$及$\Lambda(\alpha)$的存在性見§3—5.

由§3的方法，进行計算得出下表

d	5.5	5.2	5	4.8	4.4	4.2
$\Lambda(d)$	5.65	5.372	5.197	5.036	4.7085	4.56

d	4	3.8	3.6	3.4	3.2	3	2.8	2.6	2.5	$0<d\leqslant 2$
$\Lambda(d)$	4.42	4.288	4.161	4.049	3.941	3.848	3.76	3.6834	3.65	3.564

(14)

由定理B及定理C_1得到

$$\lambda(5) > 6.4524 - \int_4^{5.5}\Lambda(z)\frac{dz}{z} > 6.4524 - \Lambda(5.5)\int_{5.2}^{5.5}\frac{dz}{z} - \cdots - \Lambda(4.2)\int_4^{4.2}\frac{dz}{z} > 4.8396.$$

(i) 当$k>5$：命$a_{1i},\cdots,a_{w(p_i)i}$表示同余式

$$F(y)\equiv 0 \pmod{p_i^2} \quad (0<y\leqslant p_i^2)^{1)}$$

的解，此处$k<p_1<p_2<\cdots$为大于k的全部素数. 又命适合

$$F(y)\not\equiv 0 \pmod{q_i} \quad (0<y\leqslant q_i^{s_i+1})$$

者为b_i[2]，此处$q_1<\cdots<q_m\leqslant k$为不超过$k$的全部素数，$s_i=\sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{k}{q_i^l}\right]$. 命同余式組

1) 在此为了方便計，我們假定了同余式$F(x)\equiv 0 \pmod p$与$F'(x)\equiv 0 \pmod p$没有公根，这一假定很容易去掉.
2) 由于$F(y)$无固定的素因子，故b_i的存在性没有問題.

$$y \equiv b_i \pmod{q_i^{l_i+1}} \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

的公解为 a，又命

$$a, K; \quad a_{ij} \, (i = 1, 2, \cdots; \ 1 \leqslant j \leqslant w(p_i)). \qquad (\bar{w})$$

可知对应于 $(\bar{w})$，$\mathfrak{M}$ 表示适合下面条件的整数的集合

$$1 \leqslant n \leqslant x, F(n) \not\equiv 0 \pmod{q_i} \ (1 \leqslant i \leqslant m), F(n) \not\equiv 0 \pmod{p_i} \ (1 \leqslant i \leqslant s),$$

$$F(n) \not\equiv 0 \pmod{p_i^2} \quad (s < i \leqslant t). \qquad (15)$$

倘 w 为适合(2)式最小的正整数，則由表(14)的各分点得

$$\lambda(5) - \frac{1}{w+1}\int_{\frac{5(k+1)}{5k-w}-1}^{4} \Lambda\left(\frac{5z}{z+1}\right)\frac{dz}{z} = 4.8396 - \frac{1}{w+1}\int_{\frac{2}{3}}^{4} \Lambda\left(\frac{5z}{z+1}\right)\frac{dz}{z} -$$

$$- \Lambda(2)\int_{\frac{5(k+1)}{5k-w}-1}^{\frac{2}{3}} \frac{dz}{z} > 4.8396 + \frac{1}{w+1}\left\{\Lambda(4)\int_{3.16}^{4}\frac{dz}{z} - \Lambda(3.8)\int_{2.57}^{3.16}\frac{dz}{z} + \right.$$

$$+ \Lambda(3.6)\int_{2.12}^{2.57}\frac{dz}{z} + \Lambda(3.4)\int_{1.77}^{2.12}\frac{dz}{z} + \Lambda(3.2)\int_{1.5}^{1.77}\frac{dz}{z} + \Lambda(3)\int_{1.27}^{1.5}\frac{dz}{z} +$$

$$\left. + \Lambda(2.8)\int_{1.08}^{1.27}\frac{dz}{z} + \Lambda(2.6)\int_{1}^{1.08}\frac{dz}{z} + \Lambda(2.5)\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{dz}{z}\right\} + \frac{3.564}{w+1}\int_{\frac{5(k+1)}{5k-w}-1}^{\frac{2}{3}}\frac{dz}{z} >$$

$$> 4.8396 - \frac{5.64527}{w+1} - \frac{3.65}{w+1}\log\frac{5k-w}{w+5} = 2\delta > 0.$$

故当 x 充分大时，$\dfrac{2\delta\,\mu_F\,x}{K\log x} + o\left(\dfrac{x}{\log x}\right) > \dfrac{\delta\,\mu_F\,x}{\log x}$. 故由定理D可知当 x 充分大时，区間

$1 \leqslant y \leqslant x$ 中多于 $\dfrac{\delta\,\mu_F\,x}{\log x}$ 个 y 使 $F(y)$ 不能被 $\leqslant x^{\frac{1}{5}}$ 的素数整除，最多被区間 $x^{\frac{1}{5}} < y \leqslant$

$\leqslant x^{\frac{5k-w}{5(k+1)}}$ 中 w 个素数整除，其他的素因子都大于 $x^{\frac{5k-w}{5(k+1)}}$. 故 $F(y)$ 为不超过 $n = k + w$ 个素数的乘积. 故当 $k > 5$ 时得定理1. 特别取 $F(y) = x^k + y \ (1 \leqslant y \leqslant x)$. 則得定理2.

(ii) 一切如前段所示，由表(14)的分点即得出

$$\lambda(5) - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{4}\Lambda\left(\frac{5z}{z+1}\right)\frac{dz}{z} > 0, \quad \lambda(5) - \frac{1}{3}\int_{\frac{10}{119}}^{4}\Lambda\left(\frac{5z}{z+1}\right)\frac{dz}{z} > 0$$

及

$$\lambda(5) - \frac{1}{5}\int_{\frac{1}{180}}^{4}\Lambda\left(\frac{5z}{z+1}\right)\frac{dz}{z} > 0.$$

故由定理D得証定理1及2当 $k \leqslant 5$ 之情况及定理3.

附記：进一步运用定理 C_1，由表(14)出发，經过反复的計算(参看王元[12])，表(14)上的数值还可以进一步得到改善.

参 考 文 献

[1] 王元,論篩法及其若干应用,科学記录,新輯1卷3期 (1957),1—4.

[2] V. Brun, Le crible d'Eratoschène et le théorème de Goldbach, Vid.—Selsk. Skr. 1. M. N. KL. 3 (1920), 1—36.

[3] H. Rademacher, Beitrage zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlen—Theorie, *Abh. Math. Hamb. Univ.* 3 (1924), 12—30.

[4] G. Ricci, Ricerche aritmetiche sui polinomi, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 57 (1933), 433—475.

[5] G. Ricci, Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* (2), 6 (1937), 70—115.

[6] P. Kuhn, Zur Viggo Brun'schen Siebmethode, I. *Norske Vid. Selsk. Forh. Trordhjem* 39 (1942), 145—148.

[7] P. Kuhn, Neue Abschätzungen auf Grund der Viggo Brunschen Siebmethode, Tolfte skandinaviska Matematikerkongressen, Lund, 1953, 160—168.

[8] Ю. В. Линник, Замечание о произведении трех простых чисел, *ДАН СССР*, 72 (1950), 9—10.

[9] T. Nagell, Généralisation dún théorème de Tchbycheff, *Journ. de Math.*, (8) 4 (1921), 343—356.

[10] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton Press.

[11] 王元:表大偶数为一个素数及一个不超过四个素数的乘积之和,数学学报, 4 (1956), 565—582.

[12] 王元:論篩法及其有关的若干应用(Ⅱ),数学学报, 3 (1959), 413—429.

ON SIEVE METHODS AND SOME OF THEIR APPLICATIONS

WANG YUAN

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, we give the details of the proofs of the following three theorems (Cf. Science Record, Academia Sinica, New Ser. Vol. I, No. 3, 1957, pp. 1—5).

Theorem 1. Let $F(x)$ be an irreducible integral valued polynomial of degree k without any fixed prime divisor. Let

$$n = \begin{cases} k+1, & \text{if} \quad 1 \leqslant k \leqslant 5, \\ k+w, & \text{if} \quad k > 5, \end{cases} \tag{1}$$

where w is the least integer satisfying

$$w + 1 \geqslant \frac{5.64527}{4.8396} + \frac{3.65}{4.8396} \log \frac{5k - w}{w + 5}. \tag{2}$$

Then there are infinitely many integers x such that $F(x)$ is a product of at most n primes.

Theorem 2. Let k be a positive integer. Let n be an integer satisfying (1) and (2). Then for sufficiently large x, there is always an integer between x and $x + x^{\frac{1}{k}}$ which has at most n prime factors.

Theorem 3. For sufficiently large x, there exists always a number

(i) in interval $x < m \leqslant x + x^{\frac{10}{17}}$ with at most 2 prime factors;

(ii) in interval $x < m \leqslant x + x^{\frac{20}{49}}$ with at most 3 prime factors; and

(iii) in interval $x < m \leqslant x + x^{\frac{1}{100+\frac{2}{9}}}$ with at most 103 prime factors.

第9卷 第2期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 2
1959 年 6 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　June, 1959

求复数根的路斯法

趙 訪 熊
(清华大学)

§1. 引　　言

我們要研究的問題是求实系数代数方程的根. 为了解决这个問題，首先应当求出根的近似值. 求出充分好的近似根后，則已有多种有效的方法[2],[3] 使近似根逐步地精确化. 設該代数方程仅有实根，則求近似根的問題并不困难. 設該代数方程有虚根(非实数的复根)，用路斯[1] 法可以逐步地定出該虚根的实部的近似值. 如何求出与該实部近似值对应的虚根的虚部近似值，至今还沒有很簡单的方法.

在本文內作者将証明在用路斯法定出虚根的实部的近似值后，就可以从路斯列表計算法的表格上的已算出的数字毫不費力地算出該虚根的虚部的近似值. 即使同一实部对应着两对或更多对虚根时，定出这些虚根的各虚部也沒有困难. 当虚根的虚部很小时及当我們有一对邻近的实根时，用路斯法可以得出一对很好的近似根，一般比尾部方程定出的近似根还要好些. 当虚部并不小时可以用直綫插值法定出比較好的近似值. 从本文所举出的例題可以看出这种方法的实际效果的确是很好的. 最后我們用路斯法判断給定实系数多項式有几对虚根.

§2. 原　　理

为理論上方便起見，假設我們已用路斯法定出位置在最右的一对虚根的实部的准确值 α. 把复数平面的原点平移到 $z=\alpha$ 处后，那么給定的多項式变成

$$A_0z^n+A_1z^{n-1}+\cdots+A_{n-1}z+A_n\equiv(a_0z^{n-2}+a_1z^{n-3}+\cdots+a_{n-2})(z^2+y),\ n\geqslant 3,\qquad(1)$$

其中 $A_0=a_0=1$, $y=\rho^2$ 是正数，ρ 就是所求的虚根的虚部. A_i 是已知的，$a_1,\cdots,a_{n-2}$ 及 y 都是未知的. 这些系数間的关系是

$$A_i=a_i+a_{i-2}y,\quad i=0,1,2,\cdots n;\qquad(2)$$

用公式(2)时遇見并不存在的系数 a_{-2}, a_{-1}, a_{n-1}, a_n 时都应当解释作零.

为具体起見，暂設 $n=8$，那么用路斯列表計算法从 A_i 及 a_i 定出的一系列系数如下表所示:

$$\begin{array}{llll} A_0, & A_2, & A_4, & A_6, & A_8 \\ \underline{A_1,} & \underline{A_3,} & \underline{A_5,} & \underline{A_7} & \\ D_2, & B_2, & C_2, & A_8 & \\ D_3, & B_3, & C_3 & & \\ D_4, & B_4, & A_8 & & \\ D_5, & B_5 & & & \\ D_6, & A_8 & & & \\ D_7, & & & & \\ A_8 & & & & \end{array},\qquad \begin{array}{llll} a_0, & a_2, & a_4, & a_6 \\ \underline{a_1,} & \underline{a_3,} & \underline{a_5} & \\ \delta_2, & \beta_2, & a_6 & \\ \delta_3, & \beta_3 & & \\ \delta_4, & a_6 & & \\ \delta_5 & & & \\ \delta_6 & & & \end{array},\qquad(3)$$

其中从第二行起的系数的定法是

$$D_2 = A_2 - \frac{A_0 A_3}{A_1}, \qquad \delta_2 = a_2 - \frac{a_0 a_3}{a_1},$$

$$B_2 = A_4 - \frac{A_0 A_5}{A_1}, \cdots, \qquad \beta_2 = a_4 - \frac{a_0 a_5}{a_1}, \cdots,$$

$$D_3 = A_3 - \frac{A_1 B_2}{D_2}, \qquad \delta_3 = a_3 - \frac{a_1 \beta_2}{\delta_2},$$

$$B_3 = A_5 - \frac{A_1 C_2}{D_2}, \cdots, \qquad \beta_3 = a_5 - \frac{a_1 a_6}{\delta_2}, \cdots. \tag{4}$$

已設給定多項式(1)在右半开平面上沒有根，所以 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 都不是負数．又已設在虛軸上仅有一对純虛根 $\pm\sqrt{y}\,i$，所以(1)的右端的第一个因式 $a_0 z^{n-2} + \cdots + a_{n-2}$ 在右半閉平面上沒有根，因此 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}$ 都是正数，而且从这些系数用路斯法定出的第一列系数 $a_0, a_1, \delta_2, \delta_3, \cdots, \delta_{n-2}$ 也都是正数，因否則在右半平面或虛軸上按路斯判定原則将出現多項式的另一个实根或另一对复根了．

定理 1：設 n 次多項式在右半开平面沒有根，在虛軸上仅有一对純虛根，則用路斯法算出的第 $n-2$ 行系数是

$$D_{n-2} = a_{n-2}, \quad B_{n-2} = a_{n-2} y,$$

因此所求的虛部的平方 y 是

$$y = \rho^2 = \frac{B_{n-2}}{D_{n-2}}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{B_{n-2}}{D_{n-2}}},$$

$$D_{n-2} z^2 + B_{n-2} = a_{n-2}(z^2 + y)$$

就是所求的二次因式．

証明：为了証明方便起見，改写表(3)上的系数符号为矩陣元素符号如下：

$$\begin{array}{l} B_{00},\ B_{01},\ B_{02},\ B_{03},\ B_{04} \\ \underline{B_{10},\ B_{11},\ B_{12},\ B_{13}\qquad} \\ B_{20},\ B_{21},\ B_{22},\ B_{23} \\ B_{30},\ B_{31},\ B_{32} \\ B_{40},\ B_{41},\ B_{42} \\ B_{50},\ B_{51} \\ B_{60},\ B_{61} \\ B_{70} \\ B_{80} \end{array}, \qquad \begin{array}{l} b_{00},\ b_{01},\ b_{02},\ b_{03} \\ \underline{b_{10},\ b_{11},\ b_{12}\qquad} \\ b_{20},\ b_{21},\ b_{22} \\ b_{30},\ b_{31} \\ b_{40},\ b_{41} \\ b_{50} \\ b_{60} \end{array}, \tag{3'}$$

利用新的符号，那么(2)变成

$$\begin{cases} B_{0j} = b_{0j} + b_{0,j-1} y, & (2.0) \\ B_{1j} = b_{1j} + b_{1,j-1} y; & (2.1) \end{cases}$$

(4)变成

$$\begin{cases} B_{i,j} = B_{i-2,j+1} - \dfrac{B_{i-2,0}}{B_{i-1,0}} B_{i-1,j+1}, & (4.1) \\ b_{i,j} = b_{i-2,j+1} - \dfrac{b_{i-2,0}}{b_{i-1,0}} b_{i-1,j+1}. & (4.2) \end{cases}$$

应用上列四个公式(2.0)，(2.1)，(4.1)及(4.2)，遇見并不存在的元素时，例如当 $n=8$ 时遇見 B_{11}，B_{31} 时，应当解释該不存在的元素为零．我們将用数学归納法及(4.1)，(4.2)推出 B_{2j}，B_{3j}，$\cdots$，$B_{n-2,j}$ 与 b_{2j}，b_{3j}，$\cdots$ 間的类似(2.0)及(2.1)的关系．

玆設下列公式

$$B_{ij}=b_{ij}+b_{i,j-1}y, \tag{5}$$

当 $i=k$ 及 $i=k+1$ 时已成立．利用(4.1)，(5)及(4.2)并注意

$$B_{k0}=b_{k0},$$
$$B_{k+1,0}=b_{k+1,0};$$

即得

$$B_{k+2,j}\overset{(4.1)}{=}B_{k,j+1}-\frac{B_{k0}}{B_{k+1,0}}B_{k+1,j+1}\overset{(5)}{=}\left[b_{k,j+1}-\frac{b_{k0}}{b_{k+1,0}}b_{k+1,j+1}\right]+$$
$$+y\left[b_{kj}-\frac{b_{k0}}{b_{k+1,0}}b_{k+1,j}\right]\overset{(4.2)}{=}b_{k+2,j}+b_{k+2,j-1}y.$$

这就是說当 $i=k+2$ 时，(5)也成立．我們已知当 $i=0$ 及 $i=1$ 时(5)是成立的，(2.0)及(2.1)就是(5)当 $i=0$ 及 $i=1$ 时的形式．准数学归納法知(5)当 $i=2,3,\cdots,(n-1)$ 时也都成立．

注意表(3′)的右方表上第 $n-2$ 行只有第一个系数 $b_{n-2,0}=a_{n-2}$ 不等于零，所以当 $i=n-2$ 时，(5)給出

$$D_{n-2}=B_{n-2,0}=b_{n-2,0}=a_{n-2},$$
$$B_{n-2}=B_{n-2,1}=b_{n-2,0}y=a_{n-2}y.$$

这就是需要証明的．

其次注意 $b_{n-1,0}$ 不存在，因此

$$D_{n-1}=B_{n-1,0}=b_{n-1,0}=0.$$

最后注意 b_{00}，b_{10}，$\cdots$，$b_{n-2,0}$ 就是 a_0，a_1，δ_2，$\cdots$，δ_{n-2}，所以这些数都是正数．今有 $B_{k0}=b_{k0}$，所以 B_{00}，B_{10}，$\cdots$，$B_{n-2,0}$ 即 A_0，A_1，D_2，D_3，$\cdots$，D_{n-2} 也都是正数．D_{n-1} 則等于零．$D_n=A_n=a_{n-2}y$ 是从定义得出的，不是从第 $n-2$ 及 $n-1$ 两行的系数算出的．定理1已証完．当右半平面有根而 A_0，A_1，$\cdots$，D_{n-2} 都不等于零时这个定理的结果仍是正确的．当然实际上我們仅能定出一对虚根的实部的一个充分好的近似值．在这种情形下所得的 $\rho^*=\sqrt{\dfrac{B_{n-2}}{D_{n-2}}}$ 是虚部 ρ 的一个近似值．$D_{n-2}z^2+D_{n-1}z+D_n$ 是一个近似二次因式．

定理 2：設 n 次多項式在右半开平面沒有根，在虚軸上有两对共軛純虚根 $\pm\rho_1 i$ 及 $\pm\rho_2 i$．令

$$x=\rho_1^2+\rho_2^2,$$
$$y=\rho_1^2\rho_2^2,$$

則多項式可以写作

$$A_0z^n+A_1z^{n-1}+\cdots+A_{n-1}z+A_n=$$
$$=(a_0z^{n-4}+a_1z^{n-5}+\cdots+a_{n-4})(z^4+xz^2+y).$$

用路斯法算出的第 $n-4$ 行系数是

$$D_{n-4}=a_{n-4},\quad B_{n-4}=a_{n-4}x,\quad C_{n-4}=a_{n-4}y,$$

因此，这个多项式的四次因式是

$$D_{n-4}z^4+B_{n-4}z^2+C_{n-4}=a_{n-4}(z^4+xz^2+y),$$

虚部的平方 $t_1=\rho_1^2$ 及 $t_2=\rho_2^2$ 是下列二次方程

$$D_{n-4}t^2-B_{n-4}t+C_{n-4}=0$$

的两个正根。

証明：現在 A_i, a_i, x, y 間的关系是

$$A_i=a_i+a_{i-2}x+a_{i-4}y.$$

用矩陣元素符号可以写成

$$B_{0j}=b_{0j}+b_{0,j-1}x+b_{0,j-2}y,$$

$$B_{1j}=b_{1j}+b_{1,j-1}x+b_{1,j-2}y.$$

象定理 1 的証法一样，用数学归納法不难証明

$$B_{ij}=b_{ij}+b_{i,j-1}x+b_{i,j-2}y,$$

$$i=2,3,\cdots,n-4,n-3.$$

象以前的解释一样，不存在的系数例如 $b_{i,-1}$, $b_{i,-2}$, $b_{n-4,1}$, $b_{n-4,2}$ 都应解释作零. 特别是

$$D_k=B_{k0}=b_{k0}=\delta_k,\quad k=2,3,\cdots,n-4,n-3.$$

当 $i=n-4$ 时我們有

$$D_{n-4}=B_{n-4,0}=b_{n-4,0}=a_{n-4},$$

$$B_{n-4}=B_{n-4,1}=b_{n-4,0}x=a_{n-4}x,$$

$$C_{n-4}=B_{n-4,2}=b_{n-4,0}y=a_{n-4}y.$$

这就是要証明的。

由于已設多項式在右半开平面上沒有根，在虛軸上仅有两对純虛根，b_{00}, b_{10}, $\cdots$, $b_{n-4,0}$ 就是 a_0, a_1, δ_2, $\cdots$, δ_{n-4} 都是正数，因此 B_{00}, B_{10}, $\cdots$, $B_{n-4,0}$ 就是 A_0, A_1, D_2, $\cdots$, D_{n-4} 也都是正数. 注意第 $n-3$ 行的系数都等于零：

$$D_{n-3}=B_{n-3}=0.$$

这个定理的結果当多項式在右半开平面有根而 A_0, A_1, D_2, $\cdots$, D_{n-4} 都不等于零时仍是正确的.

定理 2 显然可以推广到在虛軸上有三对或更多对純虛根的情形. 証明方法沒有改变的必要.

让我們研究当原点附近有一对模很小的共軛虛根或一对很小的实根的情形. 在这种情形下多项式可以写作

$$A_0z^n+A_1z^{n-1}+\cdots+A_n=(a_0z^{n-2}+\cdots+a_{n-2})(z^2+xz+y), \tag{6}$$

其中 x 及 y 是很小的数字. A_i 与 a_i, x 及 y 間的关系是

$$A_i=a_i+a_{i-1}x+a_{i-2}y, \tag{7}$$

在这种情形下可以把多項式的尾部二次方程

$$A_{n-2}z^2+A_{n-1}z+A_n=0$$

当作 $z^2+xz+y=0$ 的一个近似方程[5]. 注意

$$A_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-3}x + a_{n-4}y \approx a_{n-2},$$
$$A_{n-1} = a_{n-2}x + a_{n-3}y,$$
$$A_n = a_{n-2}y,$$
$$A_{n-2}z^2 + A_{n-1}z + A_n \approx a_{n-2}\left[z^2 + \left(x + \frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}y\right)z + y\right].$$

当 $\left|\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}y\right|$ 比 $|x|$ 小得多时，尾部因式是一个相当好的近似因式．在其他情形，尾部方程的中間一个系数的相对誤差可能不小．利用下一个定理的結果可以找出更好的近似二次因式．

定理 3：設多項式在右半平面除在原点附近有一对复根外沒有其他的根，
$$A_0z^n + A_1z^{n-1} + \cdots + A_{n-1}z + A_n =$$
$$= (a_0z^{n-2} + a_1z^{n-3} + \cdots + a_{n-2})(z^2 + xz + y),$$
其中 x 及 y 充分小，則用路斯法从 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 定出的最后三个系数滿足
$$D_{n-2} \approx a_{n-2},$$
$$D_{n-1} \approx a_{n-2}x,$$
$$D_n = a_{n-2}y,$$
因此 $D_{n-2}z^2 + D_{n-1}z + D_n \approx a_{n-2}(z^2 + xz + y)$.

証明：把 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}$ 看作常数，那么 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 就是 x 及 y 的函数
$$A_i = a_i + a_{i-1}x + a_{i-2}y, \tag{7}$$
$D_2, D_3, \cdots, D_n$ 也是 x 及 y 的函数．

定理 3 內最后一个等式
$$D_n = A_n = a_{n-2}y$$
是从定义得来的．在这儿我們已設
$$a_0z^{n-2} + a_1z^{n-3} + \cdots + a_{n-2}$$
在右半平面沒有根，因此 $a_0, a_1, \delta_2, \cdots, \delta_{n-2}$ 都是正数，所以 $A_0, A_1, D_2, \cdots, D_{n-2}$ 当 $x = 0$ 时也都是正数．$D_{n-2}(x,y)$ 在 $x = 0$ 是对于 x 的連續函数，而且我們有 $D_{n-2}(0,y) = a_{n-2} \neq 0$．所以当 x 充分小时我們就有定理 3 內的第一个近似式
$$D_{n-2} \approx a_{n-2}.$$
現在只要能証明定理內第二个近似式，就証明了定理．

展开 $D_{n-1}(x,y)$ 为在 $x = 0$ 的泰劳級数
$$D_{n-1}(x,y) = D_{n-1}(0,y) + D'_{n-1}(0,y)x + \frac{D''_{n-1}(0,y)}{2!}x^2 + \cdots,$$
今有 $D_{n-1}(0,y) = \delta_{n-1} = 0$，所以当 x 充分小时我們有近似式
$$D_{n-1}(x,y) \approx D'_{n-1}(0,y)x.$$
惟
$$D'_{n-1}(0,y) = D'_{n-1}(0,0) + cy + \cdots,$$
所以当 y 充分小时我們有
$$D'_{n-1}(0,y) \approx D'_{n-1}(0,0).$$
当 x 及 y 都充分小时我們有

$$D_{n-1}(x,y) \approx D'_{n-1}(0,0)x.$$

我們要証明 $D'_{n-1}(0,0) = a_{n-2}$.

参考計算路斯系数的表格(3),知当 n 为偶数时 A_n 及 A_{n-1} 出現在

$$A_n = B_{0,n/2} = B_{2,n/2-1} = B_{1,n/2-2} = \cdots = B_{n,0};$$

$$A_{n-1} = B_{1,n/2-1}.$$

当 n 为奇数时,則 A_n 及 A_{n-1} 出現在

$$A_n = B_{1,\frac{n-1}{2}} = B_{3,\frac{n-3}{2}} = \cdots = B_{n,0};$$

$$A_{n-1} = B_{0,\frac{n-1}{2}}.$$

准路斯表格的計算方法(4.1)我們有

$$D_{n-1} = B_{n-1,0} = B_{n-3,1} - \frac{B_{n-3,0}}{B_{n-2,0}} B_{n-2,1}.$$

对 x 微分即得

$$D'_{n-1} = B'_{n-1,0} = B'_{n-3,1} - \frac{B_{n-3,0}B'_{n-2,1} + B'_{n-3,0}B_{n-2,1}}{B_{n-2,0}} + \\ + \frac{B'_{n-2,0}B_{n-3,0}B_{n-2,1}}{B^2_{n-2,0}},$$

注意 $B_{n-2,1} = B_{n,0} = A_n$, 而 $A_n = a_{n-2}y$, 在任何情形我們恆有

$$A_n(0,0) = A'_n(0,0) = 0, \tag{8}$$

在上式右端的后二項內,每項的分子都含 $B_{n-2,1}$ 或 $B'_{n-2,1}$, 即 A_n 或 A'_n. 准(8)我們有

$$D'_{n-1}(0,0) = B'_{n-1,0}(0,0) = B'_{n-3,1}(0,0).$$

用同法可証
$$B'_{n-3,1}(0,0) = B'_{n-5,2}(0,0).$$

最后得:

当 n 是偶数时, $B'_{3,n/2-2}(0,0) = B'_{1,n/2-1}(0,0) = A'_{n-1} = a_{n-2}$;

当 n 是奇数时, $B'_{2,\frac{n-3}{2}}(0,0) = B'_{0,\frac{n-1}{2}}(0,0) = A'_{n-1} = a_{n-2}$.

在任何情形我們已証 $D'_{n-1}(0,0) = a_{n-2}$. 定理 3 已証完.

当右半平面上除原点附近的一对根外尚有其他根时,只要 $A_0, A_1, D_2, \cdots, D_{n-2}$ 都不接近于零, 定理 3 的結果仍是正确的. 从以后所举例題可以看出用定理 3 得出的近似二次式一般地較好于原方程的尾部二次式.

当 x 很小而 y 并不很小时,仍可把

$$z^2 + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} z + \frac{D_n}{D_{n-2}}$$

当作一个近似二次式. 不过 z 的系数 $\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}$ 并不是 x 的很好的近似值.

作函数

$$f(x,y)=\frac{D_{n-1}(x,y)}{D_{n-2}(x,y)}.$$

当 $x=0$ 时我們有

$$D_{n-1}(0,y)=0,\quad f(0,y)=0.$$

展开 $f(x,y)$ 为在 $x=0$ 的泰劳級数，取前两項卽得近似公式

$$f(x,y)\approx f'(0,y)x.$$

注意当 x 趋向零时，D_{n-2} 趋向于常数 a_{n-2}，y 也趋向于常数 $\approx \frac{A_n}{D_{n-2}}$，因此 $f'(0,y)$ 也趋向于一个常数 k，我們有

$$f(x,y)\approx kx.$$

在路斯列表法的最后阶段我們定出最大实部虛根的实部 ξ 的一个低估 ξ_1 及一个高估 ξ_2，依次对应着两个 x 的值：

$$x_1=-2(\xi-\xi_1),$$
$$x_2=-2(\xi-\xi_2).$$

我們有

$$f(x_1,y_1)\approx kx_1=-2k(\xi-\xi_1),$$
$$f(x_2,y_2)\approx kx_2=-2k(\xi-\xi_2).$$

由此可得

$$f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)=2k(\xi_2-\xi_1),$$

$$\xi=\xi_1+(\xi-\xi_1)=\xi_1-\frac{f(x_1,y_1)}{2k}=$$

$$=\xi_1+\frac{f(x_1,y_1)}{f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)}(\xi_2-\xi_1).$$

这說明当 x 很小时可以对于 $f(x,y)$ 用直綫插值法得出实部 ξ 的一个近似值。

§3．例　　题

［例 1］　$z^4+z^3+4z^2+3z+3=(z^2+z+1)(z^2+3)$

1,	4,	3
1,	3	
1,	3	
0		

对应于純虛根的因式是

$$z^2+3.$$

另一因式以第一列头三个数为系数：

$$z^2+z+1.$$

［例 2］　$z^8+4z^7+9z^6+16z^5+22z^4+20z^3+18z^2+8z+4=$

$$=(z^4+4z^3+6z^2+4z+2)(z^4+3z^2+2)$$

1,	9,	22,	18,	4
4,	16,	20,	8	
5,	17,	16,	4	
2.4,	7.2,	4.8		
2,	6,	4		
0,	0			

四次因式是 $2z^4+6z^2+4=2(z^4+3z^2+2)$.

$$t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$$

$$\therefore \quad \rho_1^2=1, \quad \rho_2^2=2;$$

$$\rho_1=1, \quad \rho_2=\sqrt{2}.$$

[例 3][4],[5] $z^4+10.65z^3+89z^2+15.5z+27=0$

1,	89, 27
10.65,	15.5
87.54,	27
12.22	

一个近似二次因式是

$$87.54z^2+12.22z+27=87.54(z^2+0.1396z+0.3084),$$

准确二次因式是 $z^2+0.1405z+0.3091$,

原方程尾部因式是 $z^2+0.174z+0.304$.

可以看出用路斯法求出的二次因式比尾部因式好得多.

[例 4][1] $z^4+2z^3+5z^2+3z+4=0$

1,	5,	4
2,	3	
3.5,	4	
0.714		

一个近似二次因式是

$$3.5z^2+0.714z+4=3.5(z^2+0.204z+1.14),$$

准确二次因式是 $z^2+0.27834z+1.20687$,

尾部二次因式是 $z^2+0.6z+0.8$.

可以看出用路斯法求出的二次因式比尾部二次因式好得很多.

令 $z=-0.1+\zeta$, 则

$$\zeta^4+1.6\zeta^3+4.46\zeta^2+2.056\zeta+3.748=0,$$

$$\begin{array}{lll} 1, & 4.46, & 3.748 \\ 1.6, & 2.056, & \\ \hline 3.175, & 3.748 & \\ 0.166 & & \end{array}$$

$$f_2 = \frac{0.166}{3.175} = 0.0523,$$

$$y_2 = \frac{3.748}{3.175} = 1.18.$$

注意 $0.2 + 0.0523 = 0.2523$ 并不是 0.27834 的很好的近似值.

再令　$z = -0.15 + \eta$，则

$$\eta^4 + 1.4\eta^3 + 4.234\eta^2 + 1.622\eta + 3.656 = 0,$$

$$\begin{array}{lll} 1, & 4.234, & 3.656 \\ 1.4, & 1.622 & \\ \hline 3.076, & 3.656 & \\ -0.042 & & \end{array}$$

$$f_1 = -\frac{0.042}{3.076} = -0.0137,$$

$$y_1 = \frac{3.656}{3.076} = 1.19.$$

注意 $0.3 - 0.0137 = 0.2863$ 仍不是 0.27834 的很好的近似值.

虚根实部的更好的近似值可用直綫插值法得出：

$$\xi = \xi_1 + \frac{f_1}{f_1 - f_2}(\xi_2 - \xi_1) =$$

$$= -0.15 + \frac{0.0137}{0.0137 + 0.0523}(0.05) =$$

$$= -0.15 + 0.0104 = -0.1396.$$

仍用直綫插值法算出 ρ^2 的近似值是

$$\rho^2 = 1.19 - \frac{137}{660}(1.19 - 1.18) =$$

$$= 1.19 - 0.00208 = 1.1879,$$

$$y = 1.1879 + (0.1396)^2 = 1.2073.$$

对应的二次因式是

$$z^2 + 0.2792z + 1.2073.$$

与准确二次因式比較可知这是較好的近似因式.

[例 5]　$z^4 + 1.21z^3 + 1.221z^2 + 0.221z + 0.011 =$

$$= (z^2 + z + 1)(z^2 + 0.21z + 0.011)$$

1,	1.221,	0.011
1.21,	0.221	
1.038,	0.011	
0.208		

近似二次因式是 $(z^2+0.200z+0.0106)$. 这仍比尾部因式 $(z^2+0.181z+0.009)$ 好一些. 不过还需要精确化才能得出一对接近的实根。

把原点移到 $-\frac{x}{2}\approx -0.1$ 处. 令 $z=-0.1+\zeta$, 则有

$$\zeta^4+0.81\zeta^3+0.918\zeta^2+0.0091\zeta=0$$

1,	0.918,	0
0.81,	0.0091	
0.907,	0	
0.0091		

得出的近似二次因式是 $\zeta(\zeta+0.01)$. 根是 $\zeta_1=0$ 及 $\zeta_2=-0.01$. 原来方程的两个邻近的实根是 $z_1=-0.1$ 及 $z_2=-0.11$.

§4. 虚根个数的判断法

給定实系数 n 次多項式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n, \tag{9}$$

我們要找出一种判断这个多項式有几对虛根的方法.

作变换

$$u=-iz,$$

即

$$z=iu. \tag{10}$$

这是把复数平面 z 以原点为中心順时針方面轉一个直角的变换. z 平面上的正虛軸变成 u 平面上的正实軸. 复数 u 的实部等于对应复数 z 的虛部. 以(10)代入(9)即得:

$$\begin{aligned} P(iu) &= [a_n-a_{n-2}u^2+a_{n-4}u^4-\cdots]+\\ &+iu[a_{n-1}-a_{n-3}u^2+a_{n-5}u^4-\cdots]=\\ &=P_1(u)+iuP_2(u), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} P_1(u)=a_n-a_{n-2}u^2+a_{n-4}u^4-\cdots\\ P_2(u)=a_{n-1}-a_{n-3}u^2+a_{n-5}u^4-\cdots \end{cases}$$

都是 u^2 的多項式. 这个 n 次多項式的根与(9)的根一一对应,对应关系就是(10). 因这个 n 次多項式的系数并非全是实数,所以我們作下列 $2n$ 次实系数 n 次多項式

$$\begin{aligned} Q(u) &= P(iu)P(-iu)=P_1^2(u)+u^2P_2^2(u)=\\ &=c_n+c_{n-1}u^2+c_{n-2}u^4+\cdots+c_0u^{2n}=F(u^2), \end{aligned}$$

其中

$$c_n = a_n^2,$$
$$c_{n-1} = a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2},$$
$$c_{n-2} = a_{n-2}^2 - 2a_{n-1}a_{n-3} + 2a_n a_{n-4},$$
$$\cdots\cdots,$$
$$c_0 = a_0^2.$$

注意 $u^2 = -z^2$，所以 $F(z)$ 的根就是(9)的根的平方的負数，因此系数 c_k 就是罗巴契夫斯基求根法中的第一次求出的新系数.

注意(9)的根对称于 z 平面上的实軸. z 平面的实軸对应着 u 平面上的虚軸，因此 $Q(u)$ 的根对称于 u 平面上的虚軸. 在 u 平面上的右半开平面上 $Q(u)$ 的根的个数等于(9)的虚根的个数.

設(9)有虚根，則可以找出充分小的正数 ϵ 小于(9)的各虚根的虚部. 令 $u = w + \epsilon$，則 $Q(w+\epsilon)$ 在 w 平面的右半平面的根的个数就是 $P(z)$ 的虚根的个数. 設(9)只有实根，那么对于任何正数 ϵ，以上說的仍是正确的. 因此在任何情形，选 ϵ 充分小后从 w 的多項式 $Q(w+\epsilon)$ 用路斯法算出的第一列系数的变号次数就是給定多項式(9)的虚根的个数.

在一般的情形下，$Q(w+\epsilon)$ 可以用近似式

$$Q(w) + \epsilon Q'(w)$$

来代替.

$$\begin{aligned} Q(w+\epsilon) &\approx Q(w) + \epsilon Q'(w) = \\ &= [c_0 w^{2n} + c_1 w^{2n-2} + c_2 w^{2n-4} + \cdots] + \\ &\quad + 2\epsilon[nc_0 w^{2n-1} + (n-1)c_1 w^{2n-3} + (n-2)c_2 w^{2n-5} + \cdots], \end{aligned}$$

所以用路斯法时第一行及第二行系数是

$$\begin{array}{lllll} c_0, & c_1, & c_2, & \cdots, & c_{n-1}, \; c_n \\ nc_0, & (n-1)c_1, & (n-2)c_2, & \cdots, & c_{n-1} \\ \hline c_1, & 2c_2, & 3c_3, & \cdots, & nc_n \end{array}$$

在上表内第二行我們已删去正数公因子 2ϵ，在第三行已删去正数公因子 $\frac{1}{n}$. 这样做并不影响任何行数字的相对比例及符号的正确性，因此并不影响所求的变号次数. 惟当表上第一列某个数字等于零时，則不能繼續計算下一行的数字. 在这种特殊情形，則有必要用到 $Q(w+\epsilon)$ 的泰劳展开式

$$Q(w+\epsilon) = Q(w) + \epsilon Q'(w) + \frac{\epsilon^2}{2} Q''(w) + \cdots$$

的前面的更多个項作为 $Q(w+\epsilon)$ 的近似式，然后再用路斯法判断給定的多項式有几个虚根.

［例 6］　求三次式有虚根的条件.

給定三次式

$$z^3 + pz + q, \quad p \neq 0.$$

$$
\begin{array}{llllll}
\text{系数 } a_k \text{ 是} & & 1, & 0, & p, & q \\
\hline
\text{系数 } c_k \text{ 是} & & 1, & -2p, & p^2, & q^2 \\
\text{第二行系数是} & & 3, & -4p, & p^2 & \\
\hline
 & & -\dfrac{2}{3}p, & \dfrac{2}{3}p^2, & q^2 & \\
 & & -p, & p^2+\dfrac{9}{2}\dfrac{q^2}{p} & & \\
 & & -\dfrac{3q^2}{p}, & q^2 & & \\
 & & \dfrac{18}{p}\left[\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+\left(\dfrac{q}{2}\right)^2\right] & & & \\
 & & q^2 & & &
\end{array}
$$

从第一列的系数的符号可以看出：

(1)如果 $p>0$，则三次式有一对虚根.

(2)如果 $p<0$ 而 $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0$，则三次式仍有一对虚根.

(3)如果 $p<0$ 而 $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0$，则三次式沒有虚根.

参考这种方程的解的加当公式，可知我們的結果是正确的.

[例 7]　z^3+2z^2+2z+1

系数 a_k 是　1, 2, 2, 1

系数 c_k 是　1, 0, 0, 1

此时不能用上例的簡单方法. 我們应用

$$
\begin{aligned}
Q(w+\epsilon)=(w+\epsilon)^6+1=w^6+6\epsilon w^5+15\epsilon^2w^4+20\epsilon^3w^3+\\
+15\epsilon^4w^2+6\epsilon^5w+(1+\epsilon^6),
\end{aligned}
$$

其中最后項的 ϵ^6 可以删去. 列表計算即得：

$$
\begin{array}{llll}
1, & 15\epsilon^2, & 15\epsilon^4, & 1 \\
6, & 20\epsilon^2, & 6\epsilon^4 & \text{(已删去公因子 } \epsilon) \\
\hline
\dfrac{35}{3}\epsilon^2, & 14\epsilon^4, & 1 & \\
\dfrac{64}{5}\epsilon^2, & -\dfrac{18}{35\epsilon^2} & & \text{(已删去高阶項 } 6\epsilon^4) \\
\dfrac{15}{32\epsilon^2}, & 1 & & \text{(已删去高阶項 } 14\epsilon^4) \\
-\dfrac{18}{35\epsilon^2} & & & \text{(已删去高阶項)} \\
1 & & &
\end{array}
$$

注意第一列系数有两次变号，所以这个三次式有一对虚根. 事实上

$$(z^3+2z^2+2z+1)=(z+1)(z^2+z+1)$$

的确有一对虚根.

参 考 文 献

[1] Routh, E. J., Advanced Rigid Dynamics, Macmillan, 1905, 221—231.
[2] 赵訪熊,清华学报, 1 (1955), 57—67.
[3] 赵訪熊,数学学报, 5: 2 (1955), 137—147.
[4] 赵訪熊,数学学报, 3: 4 (1953), 328—341.
[5] 林士諤, *Jour. of Math. and Physics*, 20 (1941), 231—242.

ROUTH'S METHOD FOR FINDING COMPLEX ROOTS

CHAO, F. H.

(*Tsing Hwa University*)

ABSTRACT

Given a polynomial with real coefficients, it is well-known that Routh's method can be used to determine the number of complex roots of the given polynomial in the right half-plane. It is obvious that this method can be used to determine the real part of a pair of conjugate imaginary roots.

In this paper, the author proves that:

(1) the imaginary part of the pair of conjugate imaginary roots with the largest real part can also be found by Routh's method.

(2) When we have a pair of roots, real or complex, in the neighborhood of the origin, Routh's method gives in general better results than roots determined by the tail quadratic form of the given polynomial.

(3) When the imaginary part of the roots is not small, linear interpolation can be used to determine a better approximation. Finally, using Routh's method, a method for determining the number of imaginary roots is devised. Numerous illustrative examples are given.

第9卷 第2期 数学学报 Vol. 9, No. 2
1959年6月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1959

关于解析函数的一个唯一性定理及其应用

鄭 新 堤
(武汉大学)

§1. 在近代解析函数論中边界值的唯一性定理有許多的研究，其中有我們所习知著名的 И. И. Привалов 氏唯一性定理，即：

若D是某一可求长約当曲綫Γ所范围的內域，而$f(z)$是D內的半純函数，如在Γ上存在某一測度大于零的集E_z，对E_z的任一点z_0上，$f(z)$的角形边界值为零．则必致$f(z)\equiv 0$于D內．

同时，卢洵（Лузин）与普里瓦洛夫还指出：存在有单位圓域內非常数的解析函数，而在一个正測度的集$E_z(E_z \in |z|=1)$上具有等于零的射形边界值．除此之外还有一个很有用的 Koebe 氏定理．即：

若$f(z)$是单位圓域內的有界解析函数，并設$\{\lambda_n\}$是圓环：$0<\rho<|z|<1$中的一系列的約当曲綫，設z_n', z_n''是λ_n的两端，$z_n'\to a$，$z_n''\to b$，a和b是$|z|=1$上的不同点．假如$f(z)$在λ_n上一致收斂于$0(n\to+\infty$时)，则必致$f(z)\equiv 0$于$|z|<1$內．

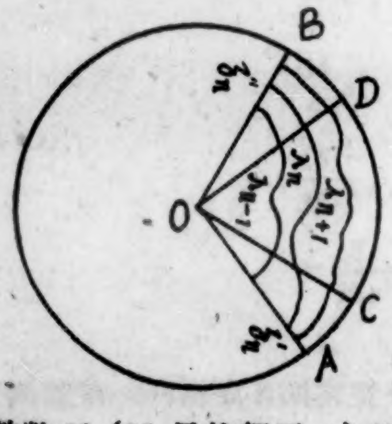
本文的目的，就是要給出与 Koebe 氏定理相类似的另一个唯一性定理，并給出它的一个应用．

§2. 現在让我們首先証明如下：

定理 I： 設$f(z)$是单位圓域內的解析函数，且在单位圓域的两个半径$\overrightarrow{OA}$，及$\overrightarrow{OB}$上$f(z)$为有界，且在$|z|<1$內存在某一簡单曲綫序列$\{\lambda_n\}$，λ_n的二端点z_n'，z_n''分别在半径$\overrightarrow{OA}$及$\overrightarrow{OB}$上，且除λ_n的二端点外，λ_n全在扇形$\triangle$($\triangle$以O为頂点，及$\angle AOB$为頂角，并以圓弧$\widehat{AB}$为扇形弧)內．假如$\{\lambda_n\}$当$n\to+\infty$时以圓弧$\widehat{AB}$为极限，并設$f(z)$在λ_n上的积分存在，且滿足

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda_n}|f(z)||dz|=0,$$

则必致$f(z)\equiv 0$于$|z|<1$內．



証： 首先让我們証明$f(z)$在扇形$\widehat{OCD}$（如图所示）內为有界．为此只需証明$f(z)$在扇形$\widehat{OCD}$內任一点z_0上有一不依賴于z_0的某一固定上界$M_0<+\infty$即可，事实上，設z_0是扇形$\widehat{OCD}$內的任一固定点，而$0<r_0\leqslant|z_0|$，因为根据定理的条件：$\{\lambda_n\}$以圓弧$\widehat{AB}$为极限，故必存在某一正整数N_0(N_0只依賴于z_0)，而致$|z|>|z_0|$，$z\in\lambda_n$当$n\geqslant N_0$时．依 Cauchy 公式可得：

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta,\quad 当\ n\geqslant N_0\ 时;$$

此处之Γ_n为直綫$\overline{Oz_n'}$，$\overline{Oz_n''}$及曲綫λ_n所合成的簡单閉曲綫．从此容易看出：

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{2M}{\delta\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_n} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|}|d\zeta|, \quad n \geqslant N_0; \tag{A}$$

此处的M是$f(z)$在$\overline{OA}$及$\overline{OB}$上的上界，而δ是$\overline{OC}$及$\overline{OD}$上的二部分綫段：$0 < r_0 \leqslant |z| < 1$，$z \in \overline{OD}$，$\overline{OC}$与直綫$\overline{OB}$及$\overline{OA}$的距离．且容易看出当$n \geqslant N_0$时$z_0$与任一$\lambda_n$的距离大于某一固定的正数$\delta_0$，故从(A)可得：

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{2M}{\delta\pi} + \frac{1}{2\pi\delta_0}\int_{\lambda_n} |f(\zeta)||d\zeta|, \quad n \geqslant N_0. \tag{B}$$

在(B)中令$n \to +\infty$，且根据定理的条件$\int_{\lambda_n} |f(\zeta)||d\zeta| \to 0$，当$n \to +\infty$时，故得

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{2M}{\delta\pi}.$$

而z_0可为扇形$\widehat{OCD}$内任何一点，只須$|z_0| \geqslant r_0 > 0$，而当$|z| \leqslant r_0$时$f(z)$显然有界，因此$f(z)$在扇形$\widehat{OCD}$内为有界．故依法都氏定理$f(z)$在圓弧$\widehat{CD}$上的角极值几乎处处存在，設此即为$f(e^{i\theta})$，令

$$w_n(\theta) = \inf_{0<R_n\leqslant r<1} |f(re^{i\theta})|, \quad e^{i\theta} \in \widehat{CD} \quad 而\ R_n \to 1\ 当\ n \to +\infty\ 时．$$

而且容易看出：

$$\lim_{n\to+\infty} w_n(\theta) = |f(e^{i\theta})|$$

在圓弧$\widehat{CD}$上几乎处处成立，而

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\widehat{CD}} w_n(\theta)\,d\theta \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda_n} |f(z)||dz| = 0.$$

同时依勒貝格氏定理得知：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\widehat{CD}} w_n(\theta)\,d\theta = \int_{\widehat{CD}} |f(e^{i\theta})|\,d\theta = 0.$$

故所以$f(e^{i\theta})$在圓弧$\widehat{CD}$上几乎处处为零．故根据普理瓦洛夫唯一性定理得知$f(z) \equiv 0$于$|z| < 1$内，証毕．

現在我們将上述定理轉化到更一般的区域时的情形．

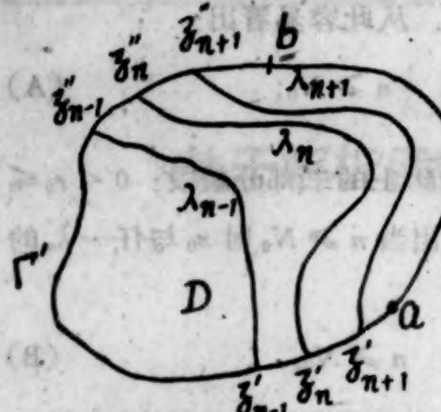
定理 I*：設$f(z)$是区域D内的全純函数，而D是某一可求长約当曲綫Γ所范围的内域，設Γ由曲綫Γ'及Γ''組成，且Γ'及Γ''皆以a，b为其二端点者．假如$f(z)$在Γ'(包括端点)上連續，且有一簡单可求长曲綫序列$\{\lambda_n\}$，λ_n除其二端点z_n'，z_n''皆落在Γ'上外全属于D内．并設$\{\lambda_n\}$以曲綫Γ''为极限，并致

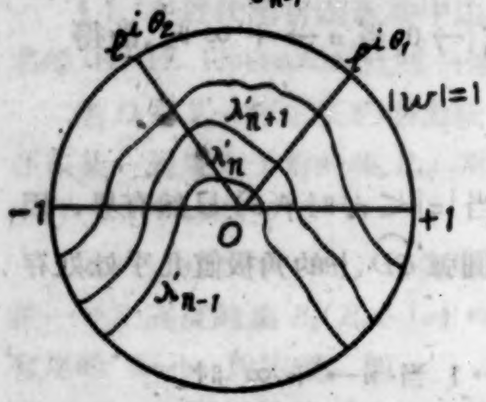
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda_n} |f(z)||dz| = 0$$

者．則必致$f(z) \equiv 0$于D内．

証：設$z = \varphi(w)$是单位圓内的单叶全純函数，$\varphi(w)$保留地映射单位圓域于D上，并致上半单位圓周映照于Γ''者．則$\{\lambda_n\}$的原象$\{\lambda_n'\}$将以上半单位圓周为极限，且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda_n'} |f[\varphi(w)]\varphi'(w)||dw| = 0.$$





我們現在要証明单位圓內的全純函数：$f[\varphi(w)]\varphi'(w)$在扇形$\triangle$($\triangle$以O为頂点，并以上半圓周內的某一圓弧$\widehat{e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}}$及$\overline{Oe^{i\theta_1}}$, $\overline{Oe^{i\theta_2}}$所围成的內域)內为有界。

事实上，取$\{R_n\}$是某一单調上昇的正数序列并具如下的性质：i: $R_n \to 1$，当$n \to +\infty$时，ii: 对每一R_n以O为中心R_n为半径作半圓C_n而C_n全在下半平面內，且自C_n的某一点P起沿C_n的二方向进行所得与λ'_n的第一交点分别为P_n及Q_n，而P_n及Q_n皆在下半圓內者 則依 Cauchy 公式可得：

$$|f[\varphi(w_0)]\varphi'(w_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda'_n}\frac{|f[\varphi(w)]\varphi'(w)|}{|w-w_0|}|dw| +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\theta'_n}^{\theta''_n}\frac{|f[\varphi(R_n e^{i\theta})]\varphi'(R_n e^{i\theta})|R_n\,d\theta}{|R_n e^{i\theta}-w_0|},$$

$$P_n = e^{i\theta'_n},\quad Q_n = e^{i\theta''_n},\tag{A}$$

此处w_0是$\triangle$內的任一固定点，而$\theta'_n \leqslant \theta''_n$. 上式中令$n \to +\infty$，則右边第一項将趋向于0，并注意$\varphi'(w) \in H_1$族，而利用黎斯定理[1] (гл. 2, §4. 4.1) 可知：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{\theta'_n}^{\theta''_n}[|f[\varphi(R_n e^{i\theta})]\varphi'(R_n e^{i\theta})| - |f[\varphi(e^{i\theta})]\varphi'(e^{i\theta})|]d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to+\infty}\left\{\left|\int_{\theta'_n}^{\theta''_n}[|f[\varphi(R_n e^{i\theta})]\varphi'(R_n e^{i\theta})| - |\varphi'(e^{i\theta})f[\varphi(R_n e^{i\theta})]|]\,d\theta\right|\right\} +$$

$$+\left|\int_{\theta'_n}^{\theta''_n}[|\varphi'(e^{i\theta})|\cdot(|f[\varphi(R_n e^{i\theta})]| - |f[\varphi(e^{i\theta})]|)]\,d\theta\right| = 0.$$

故从(A)可得：

$$|f[\varphi(w_0)]\varphi'(w_0)| \leqslant \frac{\int_{\pi}^{2\pi}|f[\varphi(e^{i\theta})]\varphi'(e^{i\theta})|d\theta + a}{2\pi\delta},\tag{B}$$

此处的δ是扇形$\triangle$与下半单位圓周的距离，而a是大于0的某一常数，而因为$f[\varphi(e^{i\theta})]$在$[\pi, 2\pi]$上連續，$\varphi'(w) \in H_1$族，故(B)右边是某一常数，故知$|f[\varphi(w)]\varphi'(w)|$在$\triangle$內有界. 而又因为

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda'_n}|f[\varphi(w)]\varphi'(w)||dw| = 0,$$

故根据定理 I 得知：$f[\varphi(w)]\varphi'(w) \equiv 0$于$|w| < 1$內. 因此$f(z) \equiv 0$于$D$內. 定理由是証毕.

根据定理 I*，我們立刻得出如下解析函数的唯一性定理，卽

定理 II: 設区域D, Γ及Γ', Γ'', $\{\lambda_n\}$等皆同于定理 I*，若$f_1(z)$, $f_2(z)$是D內的二个解析函数，且在Γ'(包括端点)皆为連續. 且在$\{\lambda_n\}$上，滿足关系

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda_n}|f_1(z)-f_2(z)||dz|=0,$$

则必致 $f_1(z)\equiv f_2(z)$ 于 D 内.

§3. 在这一节里，詎我們給出定理 II 的一个有趣的应用. 即有：

定理 III：設区域 D, Γ, Γ', Γ'' 及 $\{\lambda_n\}$ 皆同于定理 I*，而 $\{f_n(z)\}$ 为在 D 内的全純函数列，且每一 $f_n(z)$ 在 Γ' 連續并为一致有界. 即：

$$|f_n(z)|\leqslant C,\quad 当\ z\in\Gamma'\ 时\quad (n=1,2,\cdots),$$

若存在某一正数序列 $\{\varepsilon_n\}\to 0$，当 $n\to+\infty$ 时. 且对于任一固定的 ε_k 及 λ_k，必有一正整数 N 存在，当 $m,n\geqslant N$ 时，有

$$\int_{\lambda_k}|f_m(z)-f_n(z)||dz|\leqslant\varepsilon_k,$$

則必致 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内广义一致收斂.

証：首先詎我們証明在定理中的条件下，$\{f_n(z)\}$ 在 D 内广义一致有界. 事实上設 $\overline{G}_1$ 是属于 D 内的任一已定的閉区域. 由于 $\{\lambda_n\}\to\Gamma''$，故必存在某一正整数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，$\overline{G}_1$ 全属于由 λ_n 及 Γ' 的一部分曲綫所組成的一个簡单可求长閉曲綫 Γ'_n 所范围的內域，設 $\overline{G}_1$ 与 Γ'_n 的距离为 d_n，則当 $n\geqslant n_0$ 时 $d_n\geqslant d>0$，而 d 是某一常数，故依 Cauchy 強定理得知：

$$|f_m(z_0)-f_{m+p}(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_n}\frac{f_m(z)-f_{m+p}(z)}{z-z_0}dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'}\frac{|f_m(z)-f_{m+p}(z)|}{|z-z_0|}|dz|+\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_n}\frac{|f_m(z)-f_{m+p}(z)|}{|z-z_0|}|dz|,$$

此处之 $n\geqslant n_0$，而 m,p 則为任何正整数，而 z_0 为 $\overline{G}_1$ 的任一定点，故 $|z-z_0|\geqslant d$，当 $z\in\Gamma'$ 或 λ_n 时. 同时根据定理所給的条件得知，对于固定的 n 及 ε_n，必存在某一正整数 N，当 $m\geqslant N$ 时，有：

$$|f_m(z_0)-f_{m+p}(z_0)|\leqslant\frac{2Ml'}{2\pi d}+\frac{\varepsilon_n}{2\pi d}.$$

而 l' 則为 Γ' 之长度，在上式中取 $m=N$，則得：

$$|f_{N+p}(z_0)|\leqslant|f_N(z_0)|+\frac{2Ml'+\varepsilon_n}{2\pi d},\quad (p=1,2,\cdots).$$

而 $|f_N(z)|$ 在 $\overline{G}_1$ 上显然有界，故知 $\{f_n(z)\}$ 在 $\overline{G}_1$ 上一致有界，而在 D 内为广义一致有界，从此得知 $\{f_n(z)\}$ 为 D 内的正族.

我們現在只需要証明 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内每一点上为收斂即可，因为再根据正族理論中的維他利定理則可得到本定理的証明.

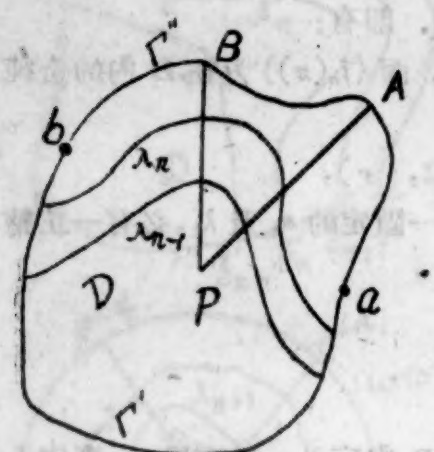
現在我們用反証法，設 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内并不在每一点上收斂，而令 z_0 即为其中的一点，則我們可从 $\{f_n(z)\}$ 中选出二子函数列：$\{f_{n_k}(z)\}$ 及 $\{f_{n'_k}(z)\}$，而使它們在某一包含 z_0 而全属于 D 的内域之閉区域 $\bar{g}$ 上分別地一致收斂于 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$. 而 $f_1(z_0)\neq f_2(z_0)$，且不失証明的眞实性，我們可令 $n_k\leqslant n'_k\ (k=1,2,\cdots)$. 并令

$$F_{n_k}(z)=f_{n_k}(z)-f_{n'_k}(z),$$

則 $\{F_{n_k}(z)\}$ 在 D 内广义一致收斂于全純函数 $f_1(z)-f_2(z)$　故我們只需証明 $\{F_{n_k}(z)\}$

的极限函数在D內恆为0即可．为此我們令

$$\lim_{n_k\to+\infty} F_{n_k}(z) = F(z).$$



如图所示，取P为D內某一內点，并在Γ''上取不同的两点：A及B，而使$\overline{PA}$及$\overline{PB}$二直綫段除A，B外全属于D內，我們現在要証明$F(z)$在以$\overline{PA}$，$\overline{PB}$，及以A，B为端点的Γ''的部分曲綫为边界的区域$\triangle$內为有界．

事实上，設z_0是$\triangle$的任一固定內点，則

$$|F(z_0)| = \lim_{n_k\to+\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_n}\frac{F_{n_k}(z)}{z-z_0}dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{n_k\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'}\frac{|F_{n_k}(z)|}{|z-z_0|}|dz| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_n}\frac{|F_{n_k}(z)|}{|z-z_0|}|dz|\right\}, \qquad \text{(A)}$$

此处的Γ'_n是由Γ'的部分曲綫及λ_n所組成的簡单可求长閉曲綫．而使z_0属于Γ'_n所围的內域者，故(A)对任意的n(正整数)只需其大于某一正整数m_0，皆成立．故对于任一固定的z_0，并依定理中的条件，容易看出(A)中右边括弧中第二項的下极限为零．而第一項則小于或等于$\frac{Ml'}{d\pi}$，此处的l'为Γ'的长度，而d則为$\triangle$与Γ'之距离．故得：

$$|F(z_0)| \leqslant \frac{Ml'}{\pi d}, \qquad z_0 \in \triangle.$$

現在我們先取λ_n的部分曲綫段λ'_n，而使λ'_n除其二端点分别在$\overline{PA}$及$\overline{PB}$上外，λ'_n全属于$\triangle$內，則显然可求长約当曲綫序列$\{\lambda'_n\}$以Γ''的部分曲綫段且以A，B为其端点者为极限，我們需要証明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda'_n}|F(z)||dz| = 0.$$

事实上：

$$\int_{\lambda'_n}|F(z)||dz| \leqslant \int_{\lambda'_n}|F(z)-F_{n_k}(z)||dz| + \int_{\lambda_n}|F_{n_k}(z)||dz|,$$

而根据定理的条件，上式右边第二項对固定的n及足够大的n_k其值小于或等于ε_n，并注意$\{F_{n_k}(z)\}$在D內是广义一致收斂的，令$n_k\to+\infty$，則得：

$$\int_{\lambda'_n}|F(z)||dz| \leqslant \varepsilon_n.$$

而$\{\varepsilon_n\}\to 0$，故依定理Ⅱ得知：

$$F(z) \equiv 0 \qquad \text{于}\triangle\text{內},$$

因此$F(z)\equiv 0$于D內，即$F(z_0) = f_1(z_0) - f_2(z_0) = 0$，故知$\{f_n(z)\}$在$D$內每一点上收斂，而在$D$內为广义一致收斂．証毕．

系：設区域D，边界Γ'，Γ''及$\{\lambda_n\}$皆同于定理Ⅲ，而$\{f_n(z)\}$是D內的全純函数列，对每一$f_n(z)$在Γ'是連續的；且

$$|f_n(z)|\leqslant M,\quad \text{当}\ z\in\Gamma'\ \text{时}\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

假如存在某一正数序列 $\{\varepsilon_n\}\to 0$，且对于任一固定的正数 ε_k 及 λ_k，必有一正整数 N 存在，而当 $m, n\geqslant N$ 时，

$$|f_m(z)-f_n(z)|<\varepsilon_k\qquad z\in\lambda_k.$$

并設 $\{\lambda_n\}$ 所相应的每一 λ_n 其长为 l_n，而 $\{l_n\}$ 为有界．则必致 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内广义一致收敛．

注意：从本文定理 I* 的証明过程中可以看出：并不需要 $f(z)$ 在 Γ' 上連續，而只需 $f(z)$ 在 Γ' 上的任一点 ζ 满足关系

$$\overline{\lim_{\substack{z\in D\\ z\to\zeta}}}|f(z)|\leqslant M$$

时，定理仍然成立．同时，相应地不难看出定理Ⅲ中的 $\{f_n(z)\}$ 亦不一定需要每一 $f_n(z)$ 在 Γ' 上連續，而只需满足关系式

$$\overline{\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}}}|f_n(z)|\leqslant M\quad \zeta\in\Gamma',\quad (n=1,2,\cdots)$$

时，定理Ⅲ中的論断仍眞实不虛．

最后，謹向王振宇同志表示衷心的感謝，他在"Borel 变换公式的新証明及其应用"一文的研究过程中，为了实际的需要，曾提出这样的問題："若 $f(z)$ 是圓内的全純函数，且存在某一正数序列 $\{r_n\}\to 1$, $r_n<1\ (n=1,2,\cdots)$，并致

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\theta_1}^{\theta_2}|f(r_ne^{i\theta})|d\theta=0,\quad \theta_1<\theta_2,$$

同时 $f(z)$ 在单位圓周上的某一圓弧 $\widehat{e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}}$ $(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$ 上的射形边界值几乎处处为 0．在上述条件下 $f(z)$ 是否恆为 0 以 $|z|<1$ 内"．本文就是在这一問題的启发下写成的．

参　考　文　献

[1] И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических Функций.
[2] Г. М. Голузин. Геометрическая теория Функций комплексного переменного.

ON THE UNIQUENESS THEOREM OF ANALYTIC FUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS

Chou Hsin-ti
(*Wu-Han University*)

Abstract

The main purpose of the present paper is to investigate some theorems as following:

Let $f(z)$ be an analytic function, regular in a region D, which is an interior region bounded by a certain rectifiable Jordan curve Γ, composed of two curves Γ' and Γ'', taking a, b as its two end points. Let $f(z)$ be continuous on Γ' (including the end points). Furthermore, we assume there exists a sequence of simple rectifiable curves $\{\lambda_n\}$, which converges to curve Γ'', belonging to D except its end points z_n' and z_n'' belonging to Γ,

and such that

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda_n}|f(z)||dz|=0,$$

then $f(z)\equiv 0$ in D.

Assume the same assumptions of D, Γ, Γ', Γ'' and $\{\lambda_n\}$, and assume $\{f_n(z)\}$ be a sequence of analytic functions, regular in D, and each $f_n(z)$ be continuous and bounded on Γ' uniformly. i. e.

$$|f_n(z)|\leqslant C,\quad \text{as } z\in\Gamma',\quad (n=1,2,\cdots).$$

Furthermore suppose that there exists a certain sequence of positive numbers $\{\varepsilon_n\}\to 0$, as $n\to+\infty$, and that for any fixed ε_k and λ_k, there exists a positive integer number N, for $m,n\geqslant N$, we have

$$\int_{\lambda_k}|f_m(z)-f_n(z)||dz|\leqslant\varepsilon_k,$$

then $\{f_n(z)\}$ is uniformly convergent in any closed region within D.

第9卷 第2期 数学学报 Vol. 9, No. 2
1959年6月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1959

模态系統与蘊涵系統

莫紹揆
(南京大学数学天文学系)

引　　言

在本文中我們采用 Łukasiewicz[1] 符号，以“$C_{\alpha\beta}$”“$A_{\alpha\beta}$”“$K_{\alpha\beta}$”“$E_{\alpha\beta}$”“N_{α}”分别表示“非α或β”(实質蘊涵)“α或β”(析取)“α与β”(合取)“$C_{\alpha\beta}$且$C_{\beta\alpha}$”(实質等价)“非α”(否定). 此外,我們更引入下列符号

“$\Box\alpha$”——α是必然的,必然α;

“$\Diamond\alpha$”——α是可能的,可能α;

“$F\alpha\beta$”表示$\Box C_{\alpha\beta}$,“$G_{\alpha\beta}$”表示$KF_{\alpha\beta}F_{\beta\alpha}$(注意,它与$\Box E_{\alpha\beta}$未必相同)[1)].
但須注意,在最后一节内,$F_{\alpha\beta}$另有意义.

我們采用公理模式而不采用含有命題变元的公理，因此在証明过程中可以用不到代入規則。

設有一規則R呈下形：$\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow \beta$(由$\alpha_1, \alpha_2$可得$\beta$)則我們用“$R(1)(2)$”表示把命題(1)当作$\alpha_1$而把命題(2)当作$\alpha_2$时所推出的命題(相当于$\beta$者);用“$R(1)R(2)(3)$”表示把命題(1)当作$\alpha_1$而把命題$R(2)(3)$当作$\alpha_2$时所推出的命題;用“$RR(1)(2)(3)$”表示把命題$R(1)(2)$当作$\alpha_1$而把命題(3)当作$\alpha_2$时所推出的命題.其余准此. 应用这种記述法可以用极簡短的記号而极精确地表示出一个証明过程，讀者极易把全部証明过程詳細写出来. 据作者所知，首先采用这种表示法的在中国是沈有鼎先生[1]，在外国是 C. A. Meredith[1]等(他們是彼此独立采用的).

在本文中我們主要是討論模态系統及蘊涵系統。

首先，作者把迄今为止各家(除 Łukasiewicz[2] 的以外)的模态系統的共通部份提出来,叫做基本模态系統,这是迄今为止所作出的最弱的模态系統,为今后立論的根据(§1).

在基本模态系統中共有四个原始推理規則，我們可把它們按各种各样的方式而加強为新原則或新公理,因此我們便得出各种各样的加強系統,本文共提出六十多种，虽未曾窮尽了其可能,但通常常見的模态系統大抵都包括在其中了(§2及§3).

我們特別地把 C. I. Lewis[1]所提出的模态系統 $S1$—$S5$ 拿来比較,我們发現,$S2$—$S4$都可以說为这些加強系統之一,而头尾两个($S1$与$S5$)則否. $S5$不在其中并不足怪，因为$S5$的特点在于高級模态命題(即其表达式中有多个□連續出現的)的縮約，而这問題在这篇文章中尚未考慮到. 至于$S1$不出現于这些加強系統之中,据作者意見,这正表明系統$S1$的缺点所在. Lewis 的书以$S1$为基础,难怪人們感覚到全书的推演非常麻煩

1) “F”即严格蘊涵,“G”即严格等价。

和困难了．后来各种模态系統的研究，又大都以 Lewis 的书为出发点，难怪因而又感到不方便了．現在我們把 Lewis 的各种系統和这里所討論的加強系統作了比較，因而使我們对 Lewis 的各系統有进一步的了解，它将对今后的模态系統的研究有良好的帮助(§ 4)．

在 § 5，我們順便提出对沈有鼎先生的初基演算的改进意見．

以上各种模态系統，連最弱的基本模态系統在內，都出現有蘊涵怪論(如果我們把"α 蘊涵 β"了解为"$\Box C_{\alpha\beta}$")，因而都不足以表达蘊涵詞的眞相；作者認为这是由于把蘊涵詞"$F_{\alpha\beta}$"与模态辞 $\Box C_{\alpha\beta}$ 互相定义的緣故．如果把这两詞認为不能互相定义而当作两个新原始概念而引入，我們将得到一个新邏輯系統，在这新系統中，蘊涵怪論絕跡，蘊涵詞及模态詞的性質均与直覺符合，这是作者想提出的一个邏輯系統，供大家选择采用．此外作者还可提出另一个系統来，其中亦沒有蘊涵怪論，但其出发点和上述系統完全不同，这个系統作者[4]早在 1950 年已經得出，但那时因无法处理联結詞 K, A，因此被迫放弃，現在已能把这两联結詞包括进来了，因此特同时提出，以供大家比較选择(§ 6)．

作为邏輯系統来說，应該包括謂詞演算．但向来当人們討論模态系統或新蘊涵系統时大都不討論这一部份，大約由于在这方面的研究尙未获显著成果的緣故．由于同一理由，作者愿把謂詞演算部分另文发表，不相混杂，这样卽使在謂詞演算部分的公理选得不够恰当，也不致于影响到命題演算部份的恰当与否了．

§1 基本模态系統

迄今为止，除 Łukasiewicz[3] 系統外，各家的模态系統都包含有下列的模态系統，叫做基本模态系統(征引时叫做系統甲)，它的公理及原則如下(我們恆假定：所引用的二值系統的公理系統中只用 C-分离原則)：

1. 如果 α 为二值系統的公理，則 $\Box\alpha$ 为系統甲的公理．
2. $F\Box\alpha\alpha$．
3. 分离原則(省称为[分])：$F_{\alpha\beta}, {}_{\alpha} \to \beta$ (由 $F_{\alpha\beta}, {}_{\alpha}$ 可得 β)．
4. 合取原則(省称为[合])：$\alpha, \beta \to K_{\alpha\beta}$．
5. 必然分离原則(省称为[必])：$F_{\alpha\beta}, \Box\alpha \to \Box\beta$．
6. 等价外延原則(省称为[外])：$G_{\alpha\beta} \to G\Box\alpha\Box\beta$．

現在我們推出系統甲的一些性質．

性質 1 如果 α 为二值系統內的形式定理，則 $\Box\alpha$ 及 α 均为系統甲內的形式定理，并且二值系統为甲的部分系統．

証 二值系統可由适当的公理而只用 C-分离原則而推出．故按(1)可把各公理前加上"□"，利用必然分离原則，易見二值系統內的形式定理前面加上符号"□"后可在系統甲內推出．再根据公理(2)及分离原則，又可推出 α．又因二值系統內有形式定理 $CK_{\alpha}C_{\alpha\beta\beta}$，故在系統甲內有 $FK_{\alpha}C_{\alpha\beta\beta}$，故当有 α, $C_{\alpha\beta}$ 时，由合取規則先有 $K_{\alpha}C_{\alpha\beta}$，再根据分离原則有 β．故二值系統內的 C-分离原則在系統甲內亦可推出．因此二值系統为系統甲的部分系統．

性質 2 在二值系統內有形式定理 $G_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$, $EC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}$ 时，在系統甲內有形式定理 $F_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, (以及 $G\Box\alpha\Box\beta$) 及 $GF_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$．

証　如果二値系統內有 $C_{\alpha\beta}$，按性質 1，甲內有 $F_{\alpha\beta}$．如果二値系統內有 $E_{\alpha\beta}$ 卽有 $C_{\alpha\beta}$ 及 $C_{\beta\alpha}$，則甲內有 $F_{\alpha\beta}$ 及 $F_{\beta\alpha}$，依合取原則又有 $G_{\alpha\beta}$，依外延規則再得 $G\Box\alpha\Box\beta$。最后如果二値系統內有 $EC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}$，依上，甲內有 $GC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}$，由規則[外]，知甲內有 $GF_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$。

准此，例如因二値系統內有 $ECK_{\alpha\beta\gamma}C_{\alpha}C_{\beta\gamma}$ 故甲內有 $GFK_{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha}C_{\beta\gamma}$，因此可知甲內有 $FKF_{\alpha\beta\alpha\beta}$（由于甲內有 $FF_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}$），又二値系統內有 $E_{\alpha}CN_{\alpha\alpha}$，故甲內有 $G\Box\alpha FN_{\alpha\alpha}$，二値系統內有 $EC_{\alpha\beta}C_{\alpha}K_{\alpha\beta}$ 故甲有 $GF_{\alpha\beta}F_{\alpha}K_{\alpha\beta}$ 等．

性質 3　在二値系統內如果有形式定理 $C_{\alpha\beta}$，$C_{\alpha}C_{\beta\gamma}$，$C_{\alpha}C_{\beta}C_{\gamma\delta}$ 等，則在系統甲內分別有規則：$\Box\alpha\rightarrow\Box\beta$；$\Box\alpha, \Box\beta\rightarrow\Box\gamma$ 及 $\Box\alpha, \Box\beta, \Box\gamma\rightarrow\Box\delta$ 等．

証　如二値系統內有 $C_{\alpha\beta}$，則甲內有 $F_{\alpha\beta}$，故依必然分离規則可得 $\Box\alpha\rightarrow\Box\beta$；如二値系統內有 $C_{\alpha}C_{\beta\gamma}$，則甲內有 $F_{\alpha}C_{\beta\gamma}$，故依必然分离規則有 $\Box\alpha\rightarrow F_{\beta\gamma}$，再依必然分离規則又有 $\Box\alpha, \Box\beta\rightarrow\Box\gamma$．其余仿此証明．

性質 4　在系統甲內如有 T 形定理：$FK_{\alpha}T_{\beta}$，則恆可选取 T 为 $C_{\alpha\beta}$，卽恆可写为："$FK_{\alpha}T_{\beta}$ 而 $T = C_{\alpha\beta}$"．

所謂 T 形定理是指：在系統甲內我們可以推出两个形式定理 T 及 $FK_{\alpha}T_{\beta}$，但无論如何不能推出 $F_{\alpha\beta}$（卽前提中含有一个永眞的部分命題而无法除去）．这种 T 形定理在 Lewis 的书中出現多次，T 可能出現各种各样的形式，甚至于可与 α，β 絕不相关．这个性質是說，尽管 T 可采取其它各种形式，但恆可采取一个极簡单、符合直覚的形式，卽取"$C_{\alpha\beta}$"形式，这样簡直不必再煩神去記忆它了．本性質的証明如下：

証　設用某种方法証出一个 T 形定理（1）$FK_{\alpha}U_{\beta}$，其中 U 为系統甲內的一条形式定理．在甲中可根据性質 2 把（1）写成 $FUC_{\alpha\beta}$，U 旣为形式定理，根据分离原則故得 $C_{\alpha\beta}$，卽 $C_{\alpha\beta}$ 亦为系統甲的形式定理．今在二値系統內有 $CK_{\alpha}C_{\alpha\beta\beta}$，依性質 1，在甲內有 $FK_{\alpha}C_{\alpha\beta\beta}$．卽可写为"$FK_{\alpha}T_{\beta}$，$T = C_{\alpha\beta}$"．

換句話說，在系統甲及其加強系統中，所有 T 形定理均可化为标准形："$FK_{\alpha}T_{\beta}$，$T = C_{\alpha\beta}$" 因此以后写出 T 形定理时不必逐条标注 T 为什么了．Lewis 不明白这点，所以費了极大气力去找各种 T 形定理[1)]，其中 T 所采的形状，极难捉摸，更与直覚无关，这由于 Lewis 对模态系統本性还不够明了的緣故．

性質 5　在系統甲內我們亦有等价替換規則．卽設 $\Phi(\alpha)$ 表示由 α 及其它若干命題純用符号 C，A，K，E，N，$\Box$，$\Diamond$，F，G 而組成，而 $\Phi(\beta)$ 表示在上命題中把一个或若干个 α 改写为 β 所得的命題，則有規則：

等价替換規則：$G_{\alpha\beta}\rightarrow G\Phi(\alpha)\Phi(\beta)$．

証　依性質 1 我們有

$$G_{\alpha\beta}\rightarrow GC_{\alpha\gamma}C_{\beta\gamma},\ GC_{\gamma\alpha}C_{\gamma\beta},\ GA_{\alpha\gamma}A_{\beta\gamma},\ GA_{\gamma\alpha}A_{\gamma\beta},\ GK_{\alpha\gamma}K_{\beta\gamma},\ GK_{\gamma\alpha}K_{\gamma\beta},\ GE_{\alpha\gamma}E_{\beta\gamma},$$
$$GE_{\gamma\alpha}E_{\gamma\beta},\ GN_{\alpha}N_{\beta},\ GF_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma},\ GF_{\gamma\alpha}F_{\gamma\beta},\ GG_{\alpha\gamma}G_{\beta\gamma},\ GG_{\gamma\alpha}G_{\gamma\beta},$$

由規則[外]有：$G_{\alpha\beta}\rightarrow G\Box\alpha\Box\beta$，$G\Diamond\alpha\Diamond\beta$．

故根据 $\Phi(\alpha)$ 的組成形状可以逐步的証出 $G\Phi(\alpha)\Phi(\beta)$．

我們必須注意，这条等价替換原則是一条超系統的定理，它不能够代替 Lewis 所給出

1）Lewis 所找的"T"都是"$\Box\alpha$"形，卽都以"$\Box$"为起首的．但这个特点至少在系統 $S1$ 中并沒有什么好处．

的等价替換原則．因为在这里，$\Phi(\alpha)$ 必須限定由 α 根据上述九个符号組成，万一 $\Phi(\alpha)$ 中出現新的联結詞，那末这里的等价替換原則便不能适用了，而 Lewis 所給的原則却沒有这个限制．

但是，我們約定：就系統甲或下面討論的加強系統言，凡是遇到新引入联結詞时，必同时引入相应的等价替換原則，这样可以担保，只要 $\Phi(\alpha)$ 是合适的公式，那末恆有下列規則：

$$G_{\alpha\beta}\rightarrow C\Phi(\alpha)\Phi(\beta).$$

因此，我們認为在下文所討論的各系統中，都具有 Lewis 所給的等价替換原則．

§2 基本模态系統的加強系統(上)

基本模态系統无疑地是太弱了，要得出模态詞的各种性質或与目前各模态系統作比較，我們須引入一些新公理，要引入这些公理，当然有很多方法，我們現在只从下列的方式加以考虑．

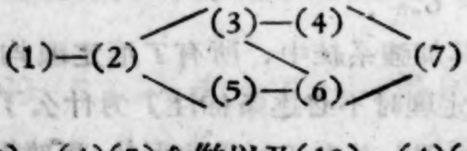
因为在系統甲中有公理(2)，故由 $F_{\alpha\beta}$ 可以推出 $C_{\alpha\beta}$．其次系統甲包含了整个二値系統，故由 $C_{\alpha\beta}$ 可以推出規則："$\alpha\rightarrow\beta$"．但反过来未必对．因此，我們对系統甲的最后一条原則(外延原則)可以第一步加強为 $CG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$ (公理 1)，再加強为 $FG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$ (公理 2)．凡由系統 X 經过这样的加強所得的系統今后分别叫做 X_1, X_2．

至于"$\alpha,\beta\rightarrow\gamma$"形的原則，則可以逐步照下法加強：

(1) $\alpha,\beta\rightarrow\gamma$　(2) $\alpha\rightarrow C_{\beta\gamma}$　(3) $C_\alpha C_{\beta\gamma}$　(4) $F_\alpha C_{\beta\gamma}$

(5) $\alpha\rightarrow F_{\beta\gamma}$　(6) $C_\alpha F_{\beta\gamma}$　(7) $F_\alpha F_{\beta\gamma}$

其間的強弱关系如下表(在直綫左方的弱于在右方的)：



再加上(8)：(3)(5)合併，(9)：(4)(5)合併以及(10)：(4)(6)合併，一共得出十个系統来(連原来系統即(1))．显然(8)弱于(6)，(9)弱于(7)而与(6)独立，(10)弱于(7)．

系統甲中的分离原則、必然原則以及合取原則都是"$\alpha,\beta\rightarrow\gamma$"形，因此可仿上面逐步作出加強，今試討論加強以后的各情况．

就分离原則言，如照原来写法次序，把 $F_{\alpha\beta}$ 相当于上面的 α，那末最強的(7)便呈下形："$FF_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$"，但这根本便是系統甲內的形式定理，因此在这方面的加強沒有得出新系統．

如果我們把分离原則写成"$\alpha, F_{\alpha\beta}\rightarrow\beta$"，再依照上面的步驟加強，可以看見上面的(4)相当于"$F_\alpha CF_{\alpha\beta\beta}$"，但这仍是系統甲中的形式定理，得不出新系統．因此所需考虑的只是加入原則(a)：$\alpha\rightarrow FF_{\alpha\beta\beta}$，公理(b) $C_\alpha FF_{\alpha\beta\beta}$ 及公理(c) $F_\alpha FF_{\alpha\beta\beta}$．凡由系統 X 經过这样的加強而得的系統今后分别叫做 X_a, X_b, X_c．

就合取原則而言，因为在系統甲內 $K_{\alpha\beta}$ 与 $K_{\beta\alpha}$ 是可以互相替換的，所以原則的两前提次序对我們下面的討論沒有影响，因此可只考虑"$\alpha,\beta\rightarrow K_{\alpha\beta}$"的形式．

照这形状說来，上面的(4)相当于"$F_\alpha C_\beta K_{\alpha\beta}$"，这亦在系統甲內，因此我們亦只需考虑

加入(5) $\alpha \rightarrow F_{\beta}K_{\alpha\beta}$（以后叫做“規則[*]”），(6) $C_{\alpha}F_{\beta}K_{\alpha\beta}$ 及 (7) $F_{\alpha}F_{\beta}K_{\alpha\beta}$。但若把(6)加入到系統甲去，可得出二值系統．証明如下：

在系統甲中有 $GF_{\beta}K_{\alpha\beta}F_{\beta\alpha}$，故根据等价替換規則可把(6)換成 $C_{\alpha}F_{\beta\alpha}$，其特例为 $C_{\alpha}FN_{\alpha\alpha}$，但在甲中又有 $G\Box\alpha FN_{\alpha\alpha}$，故这式又可換成 $C\alpha\Box\alpha$，因而推出規則“$\alpha \rightarrow \Box\alpha$”．把这規則应用于 $C\alpha\Box\alpha$ 上卽得 $F\alpha\Box\alpha$，与公理 $F\Box\alpha\alpha$ 相合併得 $G\alpha\Box\alpha$，因而便变成二值系統了．

加(7)于系統甲当然更得到二值系統，因此我們只需討論加規則[*]于系統甲所得到的新系統．凡由系統 X 作这样加強而得的系統今后叫做系統 X^*．

我們可以指出，加入規則“$\alpha \rightarrow F_{\beta}K_{\alpha\beta}$”与加入規則“$\alpha \rightarrow \Box\alpha$”相当（因此后者也叫做規則[*]），証明如下：

上面已說过，在系統甲內有 $GF_{\beta}K_{\alpha\beta}F_{\beta\alpha}$，故由“$\alpha \rightarrow F_{\beta}K_{\alpha\beta}$”先得“$\alpha \rightarrow F_{\beta\alpha}$”再得“$\alpha \rightarrow FN_{\alpha\alpha}$”卽“$\alpha \rightarrow \Box\alpha$”．

反之，在系統甲內有“$\Box\alpha \rightarrow F_{\beta\alpha}$”，故由“$\alpha \rightarrow \Box\alpha$”先得“$\alpha \rightarrow F_{\beta\alpha}$”，再根据“$GF_{\beta}K_{\alpha\beta}F_{\beta\alpha}$”而得“$\alpha \rightarrow F_{\beta}K_{\alpha\beta}$”．

規則“$\alpha \rightarrow \Box\alpha$”首先由亚里士多德提出，曾引起若干討論，近年来又由 Gödel 重新提出，并得到部分邏輯家的采用，也有部分邏輯家加以反对，无論如何，这是一条很値得注意的規則．而遵照我們的办法这規則很自然地被考慮到了．

如果把必然分离原則写成“$F_{\alpha\beta}, \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$”形，則相应于上面各加強步驟的如下，今把加入相应的公理或原則后所得到的系統分別叫做甲—癸（該公理或原則本身也叫做甲—癸）：

[甲]：$F_{\alpha\beta}, \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$，　[乙]：$F_{\alpha\beta} \rightarrow C\Box\alpha\Box\beta$，　[丙]：$CF_{\alpha\beta}C\Box\alpha\Box\beta$，

[丁]：$FF_{\alpha\beta}C\Box\alpha\Box\beta$，　[戊]：$F_{\alpha\beta} \rightarrow F\Box\alpha\Box\beta$，　[己]：系統丙戊合併，

[庚]：系統丁戊合併，　[辛]：$CF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$，　[壬]：系統丁辛合併，

[癸]：$FF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$．

这十个系統是我們今后討論的骨干．

如果把必然分离原則写成“$\Box\alpha, F_{\alpha\beta} \rightarrow \Box\beta$”形，則又有七个相应的新公理原則，其中相应于(3)(4)的分別与上面的丙丁一致，此外的則全是新的．这些新公理原則与已有的各模态系統关系較少，所以我們不在这里深入研究它們．

但是卽就上面所考慮的情形說来，已經有很多的系統需作研究了．首先有系統甲至癸，每种加或不加“*”号，共 20 种，每种又带或不带足碼 1, 2，总共（連不带的）有 60 种，每种又带或不带足碼 abc，总共（連不带的）240 种．但是其中有很多系統是相同的．

第一，容易看見，由辛可得辛$_1$，由癸可得癸$_2$，因此有

辛 = 辛$_1$，壬 = 壬$_1$，癸 = 癸$_1$ = 癸$_2$．

我們約定删后存前，故可删去辛$_1$，壬$_1$，癸$_1$及癸$_2$．

第二，容易看見

乙* = 戊*　丙* = 丁* = 己* = 庚*　辛* = 壬* = 癸*　$X_1^* = X_2^*$

因此如戊*、丁*、己*、庚*、壬*、癸* 及 X_2^* 形的系統均可删而不論．

第三，可以証明

乙$_1$ = 丙$_1$　乙$_2$ = 丙$_2$.

証　在系統甲内有 $GF_{\alpha\beta}F_{\alpha}K_{\alpha\beta}$，由此容易得(1) $CF_{\alpha\beta}F_{\alpha}K_{\alpha\beta}$. 甲内又有(2)$CF_{\alpha\beta}FK_{\alpha\beta\alpha}$. 二値系統内有規則[3]："$C_{\alpha\beta}, C_{\alpha\gamma} \rightarrow C_{\alpha}K_{\beta\gamma}$". 由[3](1)(2)得(4)：$CF_{\alpha\beta}G_{\alpha}K_{\alpha\beta}$. 但在系統乙$_1$内我們有新公理：$CG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$，从它逐步推出(5)：$CG_{\alpha}K_{\alpha\beta}CC\Box K_{\alpha\beta}\Box\beta C\Box\alpha\Box\beta$. 又应用規則[乙]于 $FK_{\alpha\beta\beta}$ 得(6)：$C\Box K_{\alpha\beta}\Box_{\beta}$. 在二値系統内可由(5)(6)推出(7) $CG_{\alpha}K_{\alpha\beta}C\Box\alpha\Box\beta$. 根据 C 可传性由(4)(7)得 $CF_{\alpha\beta}C\Box\alpha\Box\beta$，这即公理丙. 故知乙$_1$ = 丙$_1$而乙$_2$ = 丙$_2$. 故丙$_1$与丙$_2$可删而不論.

第四，可証戊$_1$ = 辛$_1$(= 辛)，因此己$_1$ = 辛$_1$，庚$_1$ = 壬$_1$(= 壬)，故戊$_1$、庚$_1$、己$_1$、辛$_1$、壬$_1$均可删而不論.

証　仿上証明，不过(6)改为(6′) $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\beta$（利用規則[戊]得），(5)改为(5′)：$CG_{\alpha}K_{\alpha\beta}CF\Box K_{\alpha\beta}\Box\beta F\Box\alpha\Box\beta$. 然后可推出 $CG_{\alpha}K_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$，再推出 $CF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$ 即系統辛.

第五，可証戊$_2$ = 癸$_2$(= 癸)，故戊$_2$ = 己$_2$ = 庚$_2$ = 辛$_2$ = 壬$_2$ = 癸$_2$均可删而不論.

証　仿上，(6)仍改用(6′). 在系統戊$_2$内有新公理 $FG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$，故把上項的(5′)改为(5″)：$FG_{\alpha}K_{\alpha\beta}CF\Box K_{\alpha\beta}\Box\beta F\Box\alpha\Box\beta$. 我們注意，在系統甲至癸及其加強系統癸$_2$中，都沒有規則"$F_{\alpha}C_{\beta\gamma}, \beta \rightarrow F_{\alpha\gamma}$"，因此要想利用(6′)而把(5″)中的第二个前提(即 $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\beta$)除去，不是一件簡易的事情. 不过現在可依下法除去. 在系統甲内有"$\Box\delta \rightarrow F_{\alpha\delta}$"，再应用規則[戊]可得"$\Box\delta \rightarrow F\Box\alpha\Box\delta$"，仿上再得"$\Box\delta \rightarrow F\Box\alpha K\Box\alpha\Box\delta$" 最后得"$\Box\delta \rightarrow FK\Box\alpha_1\Box\alpha_2K\Box\alpha_1K\Box\alpha_2\Box\delta$"，故在系統戊中可有規則"$\Box\delta, FK\Box\alpha_1\Box\alpha_2C\Box\delta\beta$ (按即 $FK\Box\alpha_1K\Box\alpha_2\Box\delta\beta$) $\rightarrow FK\Box\alpha_1\Box\alpha_2\beta$". 根据本規則及(6′)(5″)即可推得 $FG_{\alpha}K_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$. 仿上再推出 $FF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$，这便是新公理癸.

第六，显然 $X_b^* = X_c^*$，又 $X_a + \Box F_{aa} = X^*$ (故 $X_a^* = X^*$)，因此对有星号的系統只需考虑加足碼 b 便够了.

証　显然在 X^* 中可推出 $\Box F_{aa}$，其次，在 X^* 中有規則"$\alpha \rightarrow \Box\alpha$"，在系統甲中有規則"$\Box\alpha \rightarrow FC_{\alpha\beta\beta}$"，根据 F 可传性极易由这規則推出"$\Box\alpha \rightarrow FF_{\alpha\beta\beta}$"，首尾两規則合併可得"$\alpha \rightarrow FF_{\alpha\beta\beta}$"，这即 X_a 系統的新規則. 故在系統 X^* 中可推出 X_a 及 $\Box F_{aa}$.

其次，既有規則[a]："$\alpha \rightarrow FF_{aaa}$"，在甲中又有必然分离原則，即得"$FF_{aaa}, \Box F_{aa} \rightarrow \Box\alpha$"，故加入 $\Box F_{aa}$ 后两者合併得"$\alpha \rightarrow \Box\alpha$"，即得 X^*. 証明完毕.

第七，我們还有：乙$_b$ + $\Box F_{aa}$ 及戊$_c$ 均变成二値系統. 因此，乙$_b^*$至癸$_b^*$以及戊$_c$至癸$_c$均变成二値系統.

証　在乙$_b$中可推出規則"$F_{\alpha}F_{\beta\gamma} \rightarrow C_{\beta}F_{\alpha\gamma}$"如下：設有(1) $F_{\alpha}F_{\beta\gamma}$，在甲中有"$F_{\alpha\beta} \rightarrow FC_{\beta\gamma}C_{\alpha\gamma}$"再由規則[乙]"$F_{\alpha\beta} \rightarrow C\Box\alpha\Box\beta$"可把上規則变成"$F_{\alpha\beta} \rightarrow CF_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$"，把这規則应用于(1)得(2)：$CFF_{\beta\gamma\gamma}F_{\alpha\gamma}$. 但系統 X_b 内有公理(3)：$C_{\beta}FF_{\beta\gamma\gamma}$，根据 C 可传性由(2)(3)得 $C_{\beta}F_{\alpha\gamma}$. 換句話說，我們有"$F_{\alpha}F_{\beta\gamma} \rightarrow C_{\beta}F_{\alpha\gamma}$". 如果在乙$_b$中再加入 $\Box F_{aa}$，则由甲中的規則可推得(4) $F_{\beta}F_{aa}$，利用上述規則于(4)可推出 $C_{a}F_{\beta a}$，若 β 代以 $N\alpha$，则得(5)$C\alpha\Box\alpha$. 即"$\alpha \rightarrow \Box\alpha$". 把这規則应用于(5)得 $F\alpha\Box\alpha$. 因而便变成二値系統.

再討論戊$_c$，仿上可在戊$_c$内推出規則"$F_{\alpha}F_{\beta\gamma} \rightarrow F_{\beta}F_{\alpha\gamma}$". 又在甲内有 $FC_{\beta\gamma}C_{aa}$ 故在系統戊中(应用規則[戊])我們可推出(6) $FF_{\beta\gamma}F_{aa}$. 但系統 X_c 中有(7)$F_{\beta}FF_{\beta\gamma\gamma}$，利用 F 可

传性由(6)(7)可得(8) $F_\beta F_{\alpha\alpha}$. 把上述規則应用于(8)得 $F_\alpha F_{\beta\alpha}$, 代 β 以 $N\alpha$ 得 $F\alpha\Box\alpha$, 因此又得出二值系統. 証明完毕.

由前五項,可知若不計足碼 a, b, c, 則共有 21 个系統:

甲, 甲$_1$, 甲$_2$, 甲*, 甲$_1^*$; 乙, 乙$_1$, 乙$_2$, 乙*; 丙, 丙*; 丁, 丁$_1$, 丁$_2$;

戊; 己; 庚; 辛, 辛*; 壬; 癸.

沒有星号的共 16 个, 每个可加足碼 a, b, c 共 48 个; 有星号的共 5 个, 每个只加足碼 b 共 5 个, 合共可得 74 个系統. 但須除去戊$_c$至癸$_c$以及乙$_b^*$, 丙$_b^*$, 辛$_b^*$, 故实得 65 个系統. 其中是否还有相同的, 今不可知.

在后文可以証明, 規則[乙]可代以公理 $C\Box K_{\alpha\beta}\Box\alpha$, 規則[戊]可代以公理 $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\alpha$. 同理, 在系統 X_1 及 X_2 中, 外延原則可分別代以公理 $CG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$ 及 $FG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$. 至于分离原則及合取原則, 两者都有相应的形式定理(即 $CF_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}$ 或 $FKF_{\alpha\beta\alpha\beta}$ 以及 $C_\alpha C_\beta K_{\alpha\beta}$ 或 $FK_{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}$). 故仿通常証明推論定理的办法而証明下面的推論定理:

定理(推論定理)　凡从系統乙起, 附有足碼 1 或 2, 不附有星号又不附有足碼 a 的各系統, 都具有推論定理即: 如果加入新假設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_k$ 后, 可以在該系統內推出結論 β 时, 則在該系統本身內必可推出

$$C_{\alpha_1}C_{\alpha_2}C_{\alpha_3}\cdots C_{\alpha_{k-1}}C_{\alpha_k\beta}\quad (C\text{ 推論式})$$

或

$$FK_{\alpha_1}K_{\alpha_2}K_{\alpha_3}\cdots K_{\alpha_{k-1}\alpha_k\beta}\quad (FK\text{ 推論式}).$$

具体說来, 乙$_1$, 乙$_2$, 丁$_1$, 丁$_2$, 辛(= 辛$_1$), 壬(= 壬$_1$), 癸(= 癸$_2$)以及各加足碼 b, c 的, 均具有推論定理. 其中 丁$_2$, 丁$_{2c}$, 及癸(癸$_c$已退化, 不計)具有 FK 推論式, 其它均只具有 C 推論式.

把这些系統与迄今已发表的系統相比較, 可以看見:

Lewis[1] 的系統 $S1$:　介于系統丁、庚之間

Lewis 的系統 $S2$:　即系統庚

Lewis 的系統 $S3$:　即系統癸

Lewis 的系統 $S4$:　其形式定理与系統癸*的全同

Lewis 的系統 $S5$:　无相当者.

von Wright[1]的系統 M:　即系統丙*(= $S2^*$)

von Wright 的系統 M':　即系統辛*(= 癸*)

von Wright 的系統 M'':　即 $S5^*$, 无相当者.

Feys[1]的系統 t:　即系統丙*(= $S2^*$)

至于 Feys 的系統 s, r, tt 等, 討論高級模态命題的縮併, 在本文的系統中沒有相当者.

注意, $S4$ 的形式定理虽与癸*的全同, 但 $S4$ 有 FK 推論式, 而癸*甚至于連 C 推論式都沒有, 因为在 $S4$ 中"$\alpha\rightarrow\Box\alpha$"只作为超系統定理而推出, 但癸*則以这規則为系統內的規則.

本文作者[4]以前也曾以系統 $S1$ 为基础, 討論过下面的系統:

$S1.1 = S1 + CG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$. 这在本文系統中亦无相当者.

$S1.2 = S1 + FG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$. 这在本文系統中亦无相当者.

$$S1.3 = S1.2 + F\Box\alpha F\Box\beta\Box\alpha.$$

作者以前不敢断定 $S1.3$ 与 $S3$ 的同异. 今按利用 $F\Box\alpha F\Box\beta\Box\alpha$ 可使T形定理 $FK\Box\alpha\Box\delta\beta$ 中的 $\Box\delta$ 除去(当 $\Box\delta$ 为形式定理时). 但 $S1$ 中有形式定理 $FK\Box K_{\alpha\beta}T\Box\alpha$, $T = FK_{\alpha\beta\alpha}$, 为 $\Box\delta$ 形的形式定理, 因此可以除去T而得 $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\alpha$, 于是 $S1$ 便变成 $S2$. 但 $S2$ 加入 $FG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$ 后便变成 $S3$ (卽庚$_3$ = 癸), 可見 $S1.3$ 与 $S3$ 为同一系統.

在某个意义說来, 本文实卽作者前文[4]的一个継續, 不过我們不以 $S1$ 为基础而以弱得多的系統甲为基础. 所加入的新公理不限于 $CG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$ 等寥寥三两个, 而是有系統的若干种新公理罢了.

§3 基本模态系統的加强系統(下)

現在我們想对若干个重要的加強系統作进一步研究.

先討論系統乙.

定理 3.1 系統乙亦可由系統甲加入下列公理而得到.

(1) $C\Box K_{\alpha\beta}\Box\beta$

証 因系統甲有(2) $FK_{\alpha\beta\beta}$, 应用規則[乙]卽得(1). 反之,設把(1)当作公理而加入系統甲,并設 $F_{\alpha\beta}$ 已証出,記为(3). 則由[合](2′)[必](4)(3) 卽得(5) $G_{\alpha}K_{\alpha\beta}$ ((2′)表示 $FK_{\alpha\beta\alpha}$(4)表示 $FC_{\alpha\beta}C_{\alpha}K_{\alpha\beta}$). 根据(5),在(1)中把 $K_{\alpha\beta}$ 換为 α 卽得 $C\Box\alpha\Box\beta$. 換句話說, 可以推出規則 "$F_{\alpha\beta} \rightarrow C\Box\alpha\Box\beta$", 这卽[乙]. 可見加入(1)后卽得規則[乙]. 定理得証.

定理 3.2 系統乙为具有下列特点的最小的系統1):

凡 $C_{\alpha\beta}$ 为二値系統的形式定理时, $C\Box\alpha\Box\beta$ 必为系統乙的形式定理.

証 若 $C_{\alpha\beta}$ 为二値系統的形式定理,則 $F_{\alpha\beta}$ 为系統甲的形式定理, 再运用規則[乙]得 $C\Box\alpha\Box\beta$, 故它为系統乙的形式定理. 反之, 設一系統具有上列性質, 則因二値系統具有形式定理 $CK_{\alpha\beta\beta}$, 故該系統应有形式定理 $C\Box K\alpha\beta\Box\beta$, 依上知該系統包含了系統乙. 故定理得証.

在系統乙中,必然分离規則虽可用公理来代替,但外延規則却不能, 故系統乙不能具有推論定理.

注意,如果 $CK_{\alpha\beta\gamma}$ 为二値系統的形式定理, 我們只能說 $C\Box K_{\alpha\beta}\Box\gamma$ 为系統乙的形式定理,不能說 $CK\Box\alpha\Box\beta\Box\gamma$ 为其形式定理,因在系統乙中, $\Box K_{\alpha\beta}$ 与 $K\Box\alpha\Box\beta$ 是否等价无从推証之故. 換言之,二値系統有 $C_{\alpha}C_{\beta\gamma}$ 时,系統乙未必有 $C\Box\alpha C\Box\beta\Box\gamma$.

現在再討論系統丙.

定理 3.3 系統丙可由系統甲加入下列两公理而得:

(1) $C\Box K\alpha\beta\Box\alpha$

(2) $CK\Box\alpha\Box\beta\Box K_{\alpha\beta}$

証 由公理丙可推出規則[乙], 因而推出(1). 其次, 系統甲內有(3) $F_{\alpha}C_{\beta}K_{\alpha\beta}$, 由

---

1) 所謂"最小"乃对系統甲的加強系統而言,下同.

[分]丙(3)得(4) $C\Box\alpha F_{\beta}K_{\alpha\beta}$. 再由丙代入得:(5) $CF_{\beta}K_{\alpha\beta}C\Box\beta\Box K_{\alpha\beta}$, 由(4)(5)及 C 的可传性得(6) $C\Box\alpha C\Box\beta\Box K_{\alpha\beta}$.这与(2)相当. 反之, 設加入(1)(2)到系統甲去,則由(1)可推出規則[乙], 由規則[乙]可把系統甲中的(6) $FK_{\alpha}C_{\alpha\beta\beta}$ 变成(7) $C\Box K_{\alpha}C_{\alpha\beta}\Box\beta$,根据 C 的可传性由(2),(7)可得 $CK\Box\alpha F_{\alpha\beta}\Box\beta$, 这与 $CF_{\alpha\beta}C\Box\alpha\Box\beta$ 相当. 因此便推出了丙. 定理得証.

定理 3.4　系統丙为具有下列性質的最小的系統:

凡二值系統具有形式定理 $C_{\alpha_1}C_{\alpha_2}\cdots C_{\alpha_k\beta}$ 时, 該系統具有形式定理 $C\Box\alpha_1C\Box\alpha_2\cdots C\Box\alpha_k\Box\beta$ (两者亦可分別写为:

$$CK_{\alpha_1}K_{\alpha_2}\cdots K_{\alpha_{k-1}\alpha_k\beta} \text{ 及 } CK\Box\alpha_1K\Box\alpha_2\cdots K\Box\alpha_{k-1}\Box\alpha_k\Box\beta)$$

証　当 $k=1$ 时,卽 $C_{\alpha\beta}$ 为二值系統的形式定理时, 則 $C\Box\alpha\Box\beta$ 为系統乙因而为系統丙的形式定理.

当 $k=2$ 时, 卽当 $C_{\alpha_1}C_{\alpha_2\beta}$ 为二值系統的形式定理时, 則 $FK_{\alpha_1\alpha_2\beta}$ 为系統甲的形式定理, 因而(8) $C\Box K\alpha_1\alpha_2\Box\beta$ 为系統乙的形式定理, 由(2), (8)及 C 的可传性知 $CK\Box\alpha_1\Box\alpha_2\Box\beta$ 为系統丙的形式定理,这相当于 $C\Box\alpha_1C\Box\alpha_2\Box\beta$. 其余仿此逐步証明.

反之,設某一系統具有定理所述的性質, 則因 $CC_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}$ 为二值系統的形式定理, 故 $CF_{\alpha\beta}C\Box\alpha\Box\beta$ (卽丙)为該系統的形式定理,因而該系統必包含了丙. 定理得証.

注意,在系統丙中 $\Box K_{\alpha\beta}$ 与 $K\Box\alpha\Box\beta$ 是形式等价,卽 $E\Box K_{\alpha\beta}K\Box\alpha\Box\beta$, 而不是严格等价卽沒有 $G\Box K_{\alpha\beta}K\Box\alpha\Box\beta$.

注意,在系統乙內我們有 $C\Box K_{\alpha\beta}K\Box\alpha\Box\beta$ 而沒有其逆,在系統丙內两者均有. 此外当还有一系統,卽加入 $CK\Box\alpha\Box\beta\Box K_{\alpha\beta}$ 于系統甲而得的, 这系統我們这里沒有討論到.

就系統丁的本身說沒有什么显著的性質,但对 Lewis[1] 的五个系統来說,系統丁却有密切的关系,这且待下文再說.

今討論系統戊.

定理 3.5　系統戊亦可由系統甲加入下列公理而得.

(1) $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\alpha$.

証　把規則[戊]应用于 $FK_{\alpha\beta\alpha}$ 卽得(1).

反之,仿上面的論証卽可在系統甲內由(1)而推出規則[戊].

定理 3.6　系統戊是具有下列性質的最小的系統:

凡二值系統具有形式定理 $C_{\alpha\beta}$ 时,該系統具有形式定理 $F\Box\alpha\Box\beta$.

証　仿前.

注意,如果二值系統具形式定理 $CK_{\alpha\beta\gamma}$ (卽 $C_{\alpha}C_{\beta\gamma}$)时,系統戊具形式定理 $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\gamma$, 未必具有 $FK\Box\alpha\Box\beta\Box\gamma$ (卽 $F\Box\alpha C\Box\beta\Box\gamma$).

系統戊有一个很显著的特性如下.

定理 3.7　設系統戊具有形式定理 T, 則我們恆可找出一命題 γ 使得 $\Box\gamma$ 及 $F\Box\gamma T$ 均为系統戊的形式定理.

証　我們用数学归納法証明.

如果 T 为公理,則均呈 $\Box\alpha$ 形,取 $\gamma=\alpha$ 卽得.

如果 T 是由于应用分离原則而得出,卽有"$F_{\alpha}T$, $\alpha\rightarrow T$".

既有形式定理 $\Box\delta$ 使 $F\Box\delta\alpha$，再加以 $F_{\alpha}T$，依 F 的可传性可得 $F\Box\delta T$. 故取 $\gamma=\delta$ 卽得.

如果 T 是由于应用合取原则而得出，卽有"$\alpha,\beta\rightarrow K_{\alpha\beta}(=T)$". 既有形式定理 $\Box\delta_1$，$\Box\delta_2$ 使 $F\Box\delta_1\alpha$，$F\Box\delta_2\beta$ 成立，根据 $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\alpha$ 及 F 的可传性显有 $F\Box K\delta_1\delta_2\alpha$ 及 $F\Box K\delta_1\delta_2\beta$，由这极易推得(4)：$F\Box K\delta_1\delta_2K_{\alpha\beta}$. 又在甲內有"$\Box\delta_1,\Box\delta_2\rightarrow\Box K\delta_1\delta_2$"，故知(5) $\Box K\delta_1\delta_2$ 为形式定理. 故根据(4)，(5)可知取 $\gamma=K\delta_1\delta_2$ 卽可.

如果 T 是由于应用必然分离原則而得，卽有"$F_{\alpha\beta},\Box\alpha\rightarrow\Box\beta(=T)$"，則取 $\gamma=\beta$ 卽得.

如果 T 是由于应用外延原則而得，卽有"$G_{\alpha\beta}\rightarrow G\Box\alpha\Box\beta(=T)$"則取 $\gamma=E\Box\alpha\Box\beta$ 卽得(因在系統戊中容易推出 $F\Box K_{\alpha\beta}K\Box\alpha\Box\beta$，故得 $F\Box E\Box\alpha\Box\beta G\Box\alpha\Box\beta$，卽 $F\Box\gamma T$). 于是定理得証.

注意，在系統戊的加強系統中，如果这些加強系統只是由于加入 $\Box\alpha$ 形的公理而得，显然也具有本定理所敍述的性質. 特例，系統庚(丁戊合併，卽 S2)便具有同样性質.

定理 3.8 如果 T 及 $FKT\Box\alpha\beta$ 均为系統戊的形式定理，則 $F\Box\alpha\beta$ 亦然.

証 既然 T 为形式定理，可找形式定理 $\Box\gamma$ 使(6) $F\Box\gamma T$ 成立. 由(6)可得(7) $FK\Box\alpha\Box\gamma K\Box\alpha T$ 再依可传性可得(8) $FK\Box\alpha\Box\gamma\beta$. 但因系統戊內有"$\Box\alpha\rightarrow F\Box\beta\Box\alpha$"，故由 $\Box\gamma$ 可得(9) $F\Box\alpha\Box\gamma$. 但在系統甲內由(9)可得(10) $F\Box\alpha K\Box\alpha\Box\gamma$. 依可传性由(8)及(10)可得 $F\Box\alpha\beta$. 故定理得証.

我們試研究在什么情形之下，在系統戊內可把 T 形定理中的 T 删去.

設有形式定理 $FK_{\alpha}T_{\beta}$，而 T 为形式定理. 我們可把 α 化为析取-合取典范形，卽把 α 化成 $A_{\gamma_1}A_{\gamma_2}\cdots A_{\gamma_{k-1}\gamma_k}$ 之形，而每个 γ 均呈 $K\delta_1K\delta_2\cdots K\delta_{h-1}\delta_h$ 之形，而每个 δ 或为原子命題，或以 N 或 $\Box$ 起首.

显然 $FK_{\alpha}T_{\beta}$ 为 $FK_{\gamma_i}T_{\beta}(i=1,2,\cdots,k)$ 的合取，当而且只当每个 $FK_{\gamma_i}T_{\beta}$ 中都可除去 T 时全式的也可以除去. 因此只需討論 $FKK\delta_1K\delta_2\cdots K\delta_{h-1}\delta_hT_{\beta}$ 的情形卽可. 如果某一个 δ 以 $\Box$ 起首卽呈 $\Box\eta$ 之形，則 T 卽可删去. 不能删去的情形只限于每个 δ 都或为原子命題或为以 N 起首的情形. 这种情形的确是有的，例如設 ϵ 为原子命題，則 $FK_{\epsilon}TT$，及 T 均为系統戊的形式定理，但 $F_{\epsilon}T$ 則否. 同样，設 α 为形式定理，則 $FK_{\alpha}C_{\alpha\beta\beta}$ 亦然，但 $FC_{\alpha\beta\beta}$ 未必为形式定理($C_{\alpha\beta}$ 中有以 N 起首的命題).

此外，作者[2,3]曾以系統戊为基础而討論模态辞的有穷性(在[2]中作者叫它做系統 B)，获得丰富的結果，而适用范围极广.

系統己沒有什么特殊性質. 今討論系統庚. 依定义，系統庚乃系統丁戊的合併.

定理 3.9 系統庚可由系統甲加入下列两公理而得：

(1) $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\alpha$

(2) $FK\Box\alpha\Box\beta\Box K_{\alpha\beta}$

証 系統戊可由甲加入(1)而得，故現在只需証明对系統戊言，加入(2)后可得丁，加入丁后可得(2)卽可.

今在戊中有(3) $F\Box\alpha F_{\beta}K_{\alpha\beta}$，与公理(丁) $FF_{\alpha\beta}C\Box\alpha\Box\beta$ 相合，根据可传性得 $F\Box\alpha C\Box\beta\Box K_{\alpha\beta}$，而这命題在系統甲內可化成(2).

反之，在戊中有(4) $F\Box K_{\alpha}C_{\alpha\beta}\Box\beta$，由(2)，(4)根据可传性得 $FK\Box\alpha F_{\alpha\beta}\Box\beta$，这在系統甲內可化为丁．故定理得証．

注意，尽管在系統戊中，(2)与丁可以互化，但在系統甲中，(2)与丁是彼此独立的，誰也不能推出誰．故只加入(2)于系統甲中亦得一加強系統，与这里所討論的各系統均不相同．

定理 3.10　系統庚是具有下列性質的最小的系統：

凡二値系統具有形式定理 $CK_{\alpha_1}K_{\alpha_2}\cdots K_{\alpha_{k-1}\alpha_k\beta}$ 时，該系統具有形式定理 $FK\Box\alpha_1\times K\Box\alpha_2\cdots K\Box\alpha_{k-1}\Box\alpha_k\Box\beta$.

証　仿上定理 3.4 或 3.2 处的証明卽得．

下文可以看見系統庚与 $S2$ 全同．

系統辛壬沒有什么特殊的性質，今討論系統癸．

定理 3.11　系統癸是具有下列性質的最小的系統：

凡二値系統具有形式定理 $C_{\alpha_1}C_{\alpha_2}\cdots C_{\alpha_k\beta}$ 时，該系統具有形式定理 $F\Box\alpha_1F\Box\alpha_2\cdots F\Box\alpha_k\Box\beta$.

証　当二値系統具形式定理 $C_{\alpha_1}C_{\alpha_2\beta}$ 时(試先就 $k=2$ 而証)，則系統甲有形式定理 $F_{\alpha_1}C_{\alpha_2\beta}$，根据癸由此得(1) $F\Box\alpha_1F_{\alpha_2\beta}$．再根据癸有(2) $FF_{\alpha_2\beta}F\Box\alpha_2\Box\beta$．根据 F 可传性由(1)，(2)得 $F\Box\alpha_1F\Box\alpha_2\Box\beta$．故对 $k=2$ 的情形已經証明．在特例，系統癸中有形式定理 $FF_{\beta\gamma}FF_{\alpha\beta}F_{\alpha\gamma}$，因而有“加头”規則“$F_{\beta\gamma}\rightarrow FF_{\alpha\beta}F_{\alpha\gamma}$”．有此規則卽不难对 $k\geqslant 3$ 的情形而作証明．例如設 $k=3$，卽二値系統內有形式定理 $C_{\alpha_1}C_{\alpha_2}C_{\alpha_3\beta}$ 时，則系統甲內有 $F_{\alpha_1}C_{\alpha_2}C_{\alpha_3\beta}$，根据癸得(3) $F\Box\alpha_1F_{\alpha_2}C_{\alpha_3\beta}$ 再得(4) $FF_{\alpha_2}C_{\alpha_3\beta}F\Box\alpha_2F_{\alpha_3\beta}$ 及(5) $FF_{\alpha_3\beta}F\Box\alpha_3\Box\beta$．由(5)应用上述“加头”規則得(6) $FF\Box\alpha_2F_{\alpha_3\beta}F\Box\alpha_2F\Box\alpha_3\Box\beta$．由(4)，(6)及可传性可得(7) $FF_{\alpha_2}C_{\alpha_3\beta}F\Box\alpha_2F\Box\alpha_3\Box\beta$，由(3)，(7)及可传性得 $F\Box\alpha_1F\Box\alpha_2F\Box\alpha_3\Box\beta$．当 $k>3$ 时同法証明．

反之，設一系統具有本定理所敍述的性質，則因二値系統有形式定理 $CC_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}$，故該系統必有形式定理 $FF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$，因而包含了系統癸．故定理得証．

系統癸还有一性質，为此我們先給出下述定义：

定义　由 C-分离原則及下列两公理所組成的系統叫做正蘊涵系統：

$$C_{\alpha}C_{\beta\alpha}$$

$$CC_{\alpha}C_{\beta\gamma}CC_{\alpha\beta}C_{\alpha\gamma}$$

定理 3.12　对于正蘊涵系統中每一个形式定理，如果把其中每个原子命題均加上符号“$\Box$”(或把每个原子命題均改为“$F_{\alpha\beta}$”形命題)，再把“C”改为“F”，則所得的表达式必为系統癸的形式定理．

証　在二値系統中有 $C_{\alpha}C_{\beta\alpha}$，故在系統癸中有 $F\Box\alpha F\Box\beta\Box\alpha$；其次在二値系統中有 $CC_{\alpha}C_{\beta\gamma}CC_{\alpha\beta}C_{\alpha\gamma}$，故在系統癸中有(1) $FF_{\alpha}C_{\beta\gamma}FF_{\alpha\beta}F_{\alpha\gamma}$．用“加头”規則显然可以由 $F\Box\alpha\alpha$ 推出(2) $FF\alpha F_{\beta\gamma}F_{\alpha}C_{\beta\gamma}$，由(1)，(2)及可传性可推得 $FF_{\alpha}F_{\beta\gamma}FF_{\alpha\beta}F_{\alpha\gamma}$．作代入卽得 $FF\Box\alpha F\Box\beta\Box\gamma FF\Box\alpha\Box\beta F\Box\alpha\Box\gamma$．故知把正蘊涵系統两公理作这样更改后可在系統癸中推出．

在正蘊涵系統中如依 C-分离原則而作推演，卽由“$C_{\alpha\beta}$, $\alpha\rightarrow\beta$”，則在系統癸中必已

先有 $F_{\alpha'\beta'}$, α'(α', β' 表示依上述办法对 α 及 β 作变换而得的結果)，这时依 F-分离原則即可推出 β'.

依数学归納法定理得証.

本文作者提出一問題：系統癸是否具有本定理所述的性質的最小系統，即加入 $F\Box\alpha F\Box\beta\Box\alpha$ 及 $FF\Box\alpha F\Box\beta\Box\gamma FF\Box\alpha\Box\beta F\Box\alpha\Box\gamma$ 到系統甲后，可否推出系統癸?

下节将証明系統癸即 $S3$.

§4 C. I. Lewis 的模态系統 $S1$—$S5$

在各式各样的模态系統中，Lewis[1] 所給的五个系統 $S1$—$S5$ 最为有名，也被研究得最为深入. 現在我們特別把这五个系統和我們这里所討論的系統作个詳細的比較研究.

容易看見，系統甲的各公理原則均在 $S1$ 內，甚至于系統丁亦在 $S1$ 之內. 反之，$S1$ 的原則(代入原則、合取原則、分离原則及等价替換原則)均在系統甲之內，其公理 $B1$—$B5$ 及 $B7$ 亦在系統甲之內，只有公理 $B6$，不但不在系統甲之內，并且也不在系統乙、丙、丁之內. 在系統甲乙之內只有 $FKC_{\alpha\beta}C_{\beta\gamma}C_{\alpha\gamma}$，在丙丁之內更有 $CKF_{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$，但沒有 $B6$ (即 $FKF_{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$). 不过在丙丁之內即使沒有 $B6$，但 $B6$ 却可以作为 T 形定理而推出，即 $FKTKF_{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$，$T = CKF_{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$. 因此可以說，系統丙或丁基本上是和 $S1$ 等价的.

系統戊辛和 $S1$ 是彼此独立的，因为在系統戊辛內推不出公理丁，而后者包含于 $S1$ 之內. 系統庚(因而壬及癸)則包含了 $S1$，但它却強于 $S1$ 而不与之等价.

我們这里沒有一个系統与 $S1$ 等价的事实不足以作为我們所討論的范圍太过狹小的証据，勿宁可以說是 $S1$ 系統本身規定得不好(亦即 $S1$ 不应作为重要的系統)的証据.

因为在 $S1$ 中此外还有极多的 T 形定理，甚至于好些"重要"的定理在 $S1$ 內亦作为 T 形定理而出現，然則仅仅把表达 F 的可传性那个命題(在系統丙丁中是 T 形定理)删去 T 形，实在沒有什么可取之处. 本来，在系統丙丁內誰該为 T 形定理誰則否，頗有綫索可寻. 經过 $S1$ 的任意去取(某些删去 T 形某些則保留)，反使系統不够分明了. 因此作者認为 $S1$ 对于 $B6$ 的假設实在不是很可取的.

借这个机会，这里想指出 Lewis 的一个大錯誤，这錯誤也是起源于 Lewis 对系統 $S1$ 的性質不够明了而引起的.

Lewis 說([1]，195 頁等处)，在 $S1$ 中只能推出

21.3 $F\exists qKF_{pq}F_pN_qN\Diamond p$

21.31 $FKN\Diamond pT\exists qKF_{pq}F_pN_q$ $T = F_pNK_pN_p$

他說，根据 21.3 及 21.31，只能断定 $N\Diamond p$ 与 $\exists qKF_{pq}F_pN_q$ 相"等价"，所謂"等价"，意指有"$N\Diamond p \rightarrow \exists qKF_{pq}F_pN_q$"及"$\exists qK_{pq}F_pN_q \rightarrow N\Diamond p$". 他說，但是(同上，197 頁)，

'沒有自圓假設(按即 $B8$)，$N\Diamond p$ 在邏輯的力量上等价于"有命題 q 使 F_{pq} 及 F_pN_q"，但加入自圓假設后，$N\Diamond p$ 便等价于"任何命題 q 均有 F_{pq} 及 F_pN_q"了'. 他認为这些結果(对 $\Diamond p$，$\Box p$ 亦有类似結果)或許是自圓假設的最清楚的性質了.

其实 Lewis 錯了. 即在系統丙(它比 $S1$ 为弱)內，我們不但有"$EN\Diamond p\exists qKF_{pq}F_pN_q$"，而且还有"$EN\Diamond p\forall qKF_{pq}F_pN_q$"(可仿 Lewis 的 21.7 及 21.71 等做法，不难，今不贅). 因

此，即使沒有自圓假設，在弱得多的系統丙內，$N\Diamond p$ 与 $\exists qKF_{pq}F_pN_q$ 不但可以互推，并且是"实质等价"(即 E)的，并且不但与 $\exists qKF_{pq}F_pN_q$ 实质等价，还与 $\forall qKF_{pq}F_pN_q$ 实质等价．自圓假設的作用不在于把"$\exists q$"改为"$\forall q$"，而在于把"E"改为"G"(即严格等价)，或把有 T 形的 G 定理改为沒有 T 形的 G 定理．因此自圓假設的作用与存在問題无关，不必放到存在問題那一章去．

照上面的討論看来，如果用系統丙代替 $S1$，则推演上簡便异常，而 $S1$ 的基本特点不致于有任何改变．

現在再討論 $S2$，我們証明它即系統庚．

定理 4.1　$S2$ 即系統庚．

証　$S2$ 中不但可以推出系統甲，并且还可以推出公理丁（見 Lewis [1] 18.53）及戊（見 Lewis [1] 19.23，上文已証 19.23 与規則[戊]相当)，故 $S2$ 包含了系統庚．

反之，在系統甲內有 $S2$ 的各規則及公理 $B1$—$B5$，$B7$，在系統戊內有 $B8$，又二値系統有 $CKC_{\alpha\beta}C_{\beta\gamma}C_{\alpha\gamma}$，故系統庚內应有 $FKF_{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$，这即 $B6$．因此系統庚包含了 $S2$．故定理得証．

Lewis 認为在 $S2$ 內可把所有 T 形定理悉数扫去其中的 T，这是沒有根据的．因为即使在 $S3$ 我們也不能把 $FK\epsilon TT$（T 为任一形式定理，而 ϵ 为原子命題)化为无 T 定理．若說这个例子是人工做作的，那末就 Lewis 所注意到的那些 T 形定理而言，在弱得多的系統戊內可以把其中的 T 删去了，无需加強成 $S2$．

我們注意，系統庚有相当明确的特征(見上节)，利用这些特征我們可以很容易的推演出它的形式定理来(至少对于一級模态命題如此，即其表达式中沒有"□"連續出現的)．据作者检查，凡 Lewis[1] 书中所得的各形式定理，都可以利用上节的定理 3.10 而立刻推了出来，因此完全不必用到 Lewis 的那么麻煩复杂的推演．

現在再討論 $S3$．

定理 4.2　$S3$ 即系統癸．

証　系統癸既由系統庚(即 $S2$)加入公理癸而得，故即为 $S3$．

系統癸也有极明确的特征(見上节)，利用这个特征我們也可以把絕大部分的形式定理推出．依 Lemmon[1] 的建議，$S3$ 可如下公理化[1)]（其中由前三公理据猜想可推出純 F 命題，由前六公理据猜想可推出純 FK 命題)：除 F 分离原則外，还有：

(1) $FF_{pq}F_{rr}$　(2) $FF_pF_{pq}F_{pq}$　(3) $FF_{pq}FF_{qr}F_{pr}$　(4) FK_{pqp}

(5) FK_{pqq}　(6) $FF_{pq}FF_{pr}F_pK_{qr}$　(7) $FF_{pq}FN_qN_p$　(8) F_pNN_p

(9) FNN_{pp}　(10) $FK_pNK_pN_{qq}$．

这公理系統虽則公理較多一些，但各联結詞可以分划清楚是其优点．

作者在另一文[1]中指出，凡二值系統中有形式定理 $C_{\alpha\beta}$ 时，恆可找出适当的原子命題 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_h$（一般是出現在 α, β 之內的)使得在正蘊涵系統內可以推出形式定理：$CCC\cdots C_{\alpha\beta}\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_h$，依上节定理，在 $S3$ 中又必可以推出 $FF\cdots F\alpha'\beta'\Box\epsilon_1\Box\epsilon_2\cdots\Box\epsilon_h$（$\alpha'$，$\beta'$ 表示經适当办法而改写的命題)．从这点可以看見，不但正蘊涵系統与二值系統

1) 在这个公理系統內，合取原則只能作为超系統性質而推出，照本文作者意見，必須加入合取原則后，这公理系統才可算是 $S3$ 的公理系統．下文 $S4$，$S5$ 处同．

相近，連 S3 也与二値系統相近，因而 S3 的不合用也就可見了。

再討論 S4.

依 Lewis 的定义，S4 乃由 S2 加入 $F\Box\alpha\Box\Box\alpha$ 而得，Parry[1] 曾指出，可由 S3 随便加入一个 $\Box\Box\alpha$ 形的公理而得，因此又可由 S3 加入規則"$\Box\alpha\rightarrow\Box\Box\alpha$"而得。Parry 又指出，由 S1 加入 $F\Box\alpha\Box\Box\alpha$ 亦得 S4. 現在我們推广最后一結果如下：

定理 4.3 由系統丁加入公理 $F\Box\alpha\Box\Box\alpha$ 可得 S4.

証 設有(1) $F_{\alpha\beta}$，由新公理应得(2) $\Box F_{\alpha\beta}$. 由丁有(3) $FF_{\alpha\beta}C\Box\alpha\Box\beta$，根据(3)，(2)及必然分离原則得 $F\Box\alpha\Box\beta$. 换言之，可以推出規則"$F_{\alpha\beta}\rightarrow F\Box\alpha\Box\beta$"即得戊。因此系統丁变成系統庚即 S2. 既加入了 $F\Box\alpha\Box\Box\alpha$，故得 S4，而定理得証。

依照 Lemmon[1]，只須把上述的 S3 的公理系統中的(1)改为：

(1′) F_qF_{rr}

即得 S4 的公理系統，据猜想，由前三公理可推出 S4 的純 F 命題，由前六公理可推出 S4 的純 FK 命題。如果猜想是对的，那末 S4 的純 F 命題是正蘊涵系統的一个部分系統。

这里再強調一句，S4 的形式定理与系統癸*的全同，但后者有規則"$\alpha\rightarrow\Box\alpha$"，而在 S4 中这規則只作为超系統性質而推出。因此两系統不是完全相同的(系統癸*較強)。

現在再説 S5. 依定义，它是由 S2 加入 $F\Diamond\alpha\Box\Diamond\alpha$ 而得 Parry[1] 曾証明把同一命題加入 S1 仍得 S5. 現在我們再推广他的結果如下：

定理 4.4 如果把 $F\Diamond\alpha\Box\Diamond\alpha$ 加入系統丁，可得 S5.

証 純粹只用系統甲的性質，依照 Lewis[1] 的方法，即可由 $F\Diamond\alpha\Box\Diamond\alpha$ 而推出 $F\Box\alpha\Box\Box\alpha$ 来，因此系統丁变成 S4，再加入 $F\Diamond\alpha\Box\Diamond\alpha$ 即得 S5.

依照 C. A. Meredith[1]，把上面 S4 的公理系統中的(2)改为：

(2′) $FFFF_{pqr}F_{pq}F_{pq}$

則得 S5 的公理系統，并且可以証明(并非只是猜想)由前三个公理可以推出 S5 的純 F 命題来。此外 S5 的純 F 命題也可以有其它的公理化法，甚至于只用一条公理。

由上面还可看見，S2 的性質有好些是可以推广到系統丁去的。下面我們还給出两个推广到系統戊去的結果。

Parry[1] 曾証明，如果把 $F\Box\Diamond\alpha\alpha$ 加到 S2 去可得二値系統。今推广如下：

定理 4.5 如果把規則"$\Box\Diamond\alpha\rightarrow\alpha$"加到戊去則得二値系統。

証 在系統戊中极易推出(1) $F\Diamond\alpha\Diamond A_{\alpha\beta}$ (A 为析取詞)，再应用系統甲中的規則："$F_{\alpha\beta},F_{\gamma\beta}\rightarrow FA_{\alpha\gamma\beta}$"可得 $FA\Diamond\alpha\Diamond\beta\Diamond A_{\alpha\beta}$. 作代入可得(2) $FC\Box\alpha\Diamond\Box\alpha\Diamond C\alpha\Box\alpha$. 应用規則[戊]于(2)得(3) $FF\Box\alpha\Diamond\Box\alpha\Box\Diamond C_\alpha\Box\alpha$. 但它的前提可証故应用分离原則得(4) $\Box\Diamond C_\alpha\Box\alpha$. 由(4)应用新原則得(5) $C_\alpha\Box\alpha$. 即有"$\alpha\rightarrow\Box\alpha$". 应用此規則于(5)得 $F\alpha\Box\alpha$. 与 $F\Box\alpha\alpha$ 合併得 $G\alpha\Box\alpha$. 因而得二値系統。

Parry[1] 曾説到，若加 $G\Box\Diamond\alpha\Box\alpha$ 到 S1 去可得二値系統，我們亦可推广为：加 $G\Box\Diamond\alpha\Box\alpha$ 到系統丁去亦得二値系統(即用 Parry 原来的証明)。

§5 关于沈有鼎的初基演算

沈有鼎[1]先生的初基演算，可以説是用直覚主义的眼光来討論模态系統，也可以説是

用模态的观点来推广直觉主义系統．这是一个新尝試，是一条很可繼續研究的道路．比如，初基演算是否就是 S4 与极小演算的共通部分抑或只是該共通部分的一个真部分？这仍是还待研究的問題．不过，即就初基演算的公理的选择而論，仍可以作显著的改进．

沈有鼎先生認为他"对公理的选择有其特殊的标准"，因此无法把包含"⊃"及"∧"(今后分别表为"C"及"K")两联結詞的部分析而为二，同时他又認为如果要照顧到他的"挑选公理的标准"，也难于把非有机公理删除．他挑选公理的标准究竟如何，沒有明言．不过以本文作者看来，这两个缺点(以及其它的缺点)都可以除去，并沒有影响到他的公理系統的原有优点．现在把改进办法陈述于后．

第一，A3 改用 A16，A4 改用 A13（即由原来的 $CK_{\alpha\beta\gamma}$ 形改为 $C_\alpha C_{\beta\gamma}$ 形)．这样 A1，A2，A16，A13 不但是純 C 命題，而且据本文作者猜想由它們(及分离原則)可以推出 S4 的全部純 C 命題(后来知道，Lemmon[1] 也作同样的猜想，可謂不謀而合)．如果这个猜想是对的，那末不但 S4 的純 C 命題可以公理化，并且 S4 的純 C 命題是正蘊涵系統(即极小演算的純 C 命題)的部分系統．

第二，A7 原为 $CK_{\alpha\beta\gamma}$ 形，也改成 $C_\alpha C_{\beta\gamma}$ 形，即改用

$$A7':CC_{pq}CC_{pr}C_pK_{qr}$$

沈先生虽沒有推出 A7′，但仿推演 A12（或 A13）的方法即可推演出 A7′ 来，今不贅．这样 A5—A7 与 A1—A4′ 合併，即可推出 S4 中的純 CK 命題来．我們所以把 A7 改为 A7′，是希望尽量少用模式 II（即合取原則)．的确，照我們的改进以后，要推出純 CK 命題可以根本不用模式 II．

第三，A23 也由 $CK_{\alpha\beta\gamma}$ 形改为 $C_\alpha C_{\beta\gamma}$ 形，即改用

$$A23':CC_{pr}CC_{qr}CA_{pqr}$$

推出 A23′ 的方法和 A7′ 方法同．这样，A21—23′ 与 A_1—A_4' 合併，可以推出 S4 中的純 CA 命題来，同时也根本用不到模式 II．

第四，A24 可改为

$$A24':CK_pA_{qr}AK_{pqr}$$

这不但比 A24 簡短，且也是自己对偶(self-dual)的．与其它公理配合后 A24 与 A24′ 彼此可以互推，那是很显然的，今不贅．A24′（或 A24)与其它 A1—4′，A5—7′，A21—23 配合，可以推出所有的 S4 中純 CKA 命題来，也可以根本不用模式 II．

第五，A32 与 A33 可如下更改．我們不但把 A32 改成 $C_\alpha C_{\beta\gamma}$ 形，而且加強一些；又把 A33 从无机性改成有机性，而且不出現 K，改进結果如下：

$$A32':CC_pN_qC_qN_p\qquad A33':CC_pN_pC_qN_p$$

A32′—A33′ 与 A1—4′ 配合，可以推出初基演算中所有純 CN 命題，也用不到模式 II．但要推出所有純 CKN 命題或所有純 CAN 命題等，則还不够．我們还須加入其它公理(見后)．

第六，A34 与 A1—7′ 及 A32′—33′ 配合后可以推出初基演算中所有純 CKN 命題，也可以推出所有純 CAN 命題(純 CAN 命題需借助于 A34，而 A34 含有符号 K，这是一个缺点)也可推出所有 CKAN 命題．这样初基演算的公理系統便可以作成．

有兴趣的是，依照我們上面的公理形式，合取原則(即沈有鼎先生的模式 II)完全沒有

用到. Lemmon[1] 曾經証明，当用来推出系統 $S3$ (及更強的系統，其中公理均取 $C_{\alpha\beta}$ 形式的)的形式定理时，合取原則是可以省去的. 但 Lemmon 因而認为合取原則可以推出，这却是錯誤的，因为他只証明了用来推出 $S3$ 的形式定理时，合取原則可省，幷沒有(也不能)証明用来推出任何定理时合取原則可省(比如說，加入若干不是 $C_{\alpha\beta}$ 形的公理后，合取原則便不能省了). 不过他的錯誤却是很多人都具有的.

尽管如此，我們却可以說，卽使不假定合取原則，我們仍可以推出所有初基演算內的形式定理. 因此我們看見下列的現象:

設采取我們的公理以及分离原則，所得的叫做初基演算(1)，那末在初基演算(1)之上加入合取原則，結果原則虽有增加，但形式定理一样，这可叫做初基演算(2). 在初基演算(2)之上再加入原則"$\beta \to C_{\alpha\beta}$"，結果原則又有新增加，但形式定理仍然照旧. 这系統可叫做初基演算(3). 如果照一部分人的見解，只管形式定理不管規則，那末这三种初基演算該是同一的系統，但本文作者認为規則应該顧到，所以这三种初基演算該属于不同的系統(初基演算(2)卽沈有鼎先生提出的系統).

与此类似，当加強初基演算时，沈先生提出的所需增加的公理也可改用下列的公理:

$B1$ (照旧) $F1$ (照旧)

$C1'$ $CA_{\alpha\beta}CN_{\alpha\beta}$

$E1'$ $ÇCN_{\alpha\alpha}C_{\beta\alpha}$

这样比原来所用的为优，理由同上不贅.

§6 两个蘊涵系統

历史上說来，模态系統本来是由于不滿意二値系統內的蘊涵怪論(如 C_pC_{qp} 及 C_pCN_{pq}) 而提出的. 我們要問，在各式各样的模态系統中，对这問題到底解决了沒有? 它們能否避免了这些蘊涵怪論? 如果避免了，它們本身是否仍有蘊涵怪論?

上面巳經指出，在某种意义上說来，系統 $S3$ 內带来了全部正蘊涵系統甚至于全部二値系統，因此系統 $S3$ 以及更強的系統其不合用是不消說得的. 現在硏究較弱的系統.

在 $S2$ 內仍有蘊涵怪論，Lewis[1] 巳經知之. 具体說来，如

$$F\Box\alpha F_{\beta\alpha}, \quad F\Box N_{\alpha}F_{\alpha\beta}$$

卽由任一命題可推出一必然命題，由不可能命題可推出任何命題，它与二値系統內的怪論相去几何? Lewis 曾給以辯护，但他的辯护办法，一下子認定必然命題就是 $A_{\beta}N_{\beta}$，而不可能命題就是 $K_{\beta}N_{\beta}$. 因此卽使我們相信他的辯护詞，也只能相信由任一命題可推出 $A_{\beta}N_{\beta}$，由 $K_{\beta}N_{\beta}$ 可推出任一命題罢了. 不錯，在 $S2$ 內任何两必然命題都严格等价，任何两不可能命題都严格等价，但这不足以解我們的疑惑，反足使我們怀疑 $S2$ 的合用性. 因为，尽管所謂"必然"这个概念沒有严格的定义，但什么是必然命題，通常人大体有相当确定一致的看法. 自然科学上的定律，一般認为是必然的，卽使依照 Lewis，把"必然"限于邏輯上的，但数学上的定理总是認为必然的. 我們始終不敢相信，"1 + 1 = 2"与"三角形三內角和为两直角"是严格等价的(卽彼此可以互推的)，更不敢相信，由"今天下雨"可以推出"1 + 1=2"，也不敢相信，由"1 + 1=3"可以推出"张三說話"来. 因此 Lewis 的辯护是落空的.

Lewis 怀疑 $FF_{\alpha\beta}FF_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$ 的合法性，也許还怀疑“$F_{\alpha\beta}\rightarrow FF_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$”的合法性，如果他兼怀疑后者，那末 $S2$ 便不合用，因为在 $S2$ 里可以推出后面这个規則的.

甚至于在更弱的 $S1$ 內，仍有蘊涵怪論，例如

$$C\Box\alpha F_{\beta\alpha}, \qquad C\Box N_{\alpha}F_{\alpha\beta}$$

对这两命題，上面的討論仍然适用.

甚至于在我們所討論的最弱的基本模态系統，即系統甲，仍然有下列的蘊涵怪論：

$$\Box\alpha\rightarrow F_{\beta\alpha}; \qquad \Box N_{\alpha}\rightarrow F_{\alpha\beta};$$

$$F_{\alpha}A_{\beta}N_{\beta}; \qquad FK_{\beta}N_{\beta\alpha}.$$

根据上面的討論(因为上面所举的例子仍然适用)我們仍認为前面两个命題是属于蘊涵怪論的. 至于后面两个命題是否蘊涵怪論，那就看我們滿意不滿意 Lewis 的辯护而定了.

既然連最弱的基本模态系統也不能避免蘊涵怪論，足見当初提出模态系統时所想达到的目的是不能达到的了. 的确，現在人們都認为想利用“严格蘊涵”来避免蘊涵怪論是不可能的，大多数人都干脆使用“实質蘊涵”了. 他們認为模态系統的价値在于研究模态概念如“必然”“可能”等等，而不在于解决蘊涵怪論.

作者認为这个結論是对的，模态系統的价値的确在于研究模态概念而不在于解决蘊涵怪論. 不过如果因而便容忍蘊涵怪論，干脆使用实質蘊涵，那却値得討論了. 事实上也已經有好些人另闢途径来解决蘊涵怪論了.

解决的途径是：把“α 蘊涵 β”当作原始概念[1)]，既不象实質蘊涵系統那样当作“非 α 或 β”，也不象严格蘊涵系統那样当作“α 而且非 β 是不可能的”. 这样它便可以摆脱“或”“并且”“非”等概念的束縛，也摆脱“必然”“可能”等概念的束縛，因而尽可能地依照直覚所認可的“蘊涵”概念而选择公理了(不过公理必須选择得恰当). Lewis 当初也是想照这个办法的，但他却承認“蘊涵”与模态概念可以互相定义，以致被迫对严格蘊涵的怪論作辯护了. 如不承認它們互相定义，問題便沒有了. 下面我們先介紹一些新系統的大概.

最初采取这个办法的是 E. J. Nelson，他否認 $FK_{\alpha\beta\alpha}$，$F_{\alpha}A_{\alpha\beta}$ 等(曾引起 Bronstein 的批評，Nelson 后来也改变主意了)，这系統頗値得注意，可惜未曾好好发展，无法詳細討論.

以后 Halldén 把 $S1$ 系統中的公理当作 F 的公理，但不引入模态概念“◇”，更不承認“$F_{\alpha\beta}=\Box C_{\alpha\beta}$”这个定义. 这个系統($SO$)內虽則沒有蘊涵怪論，但它的不够用那是很显然的.

Takeo Sugihara[1] 的 SA 系統乃由 SO 系統加入公理 $FFN_{\alpha\beta}FN_{\beta\alpha}$ 而得，仍沒有蘊涵怪論，但仍不够用(比如，沒有定理 $FFK_{\alpha\beta\gamma}FK_{\alpha}N_{\gamma}N_{\beta}$，如果这个公理加入，則 SA 变成 $S1$ 了).

Emch 提出一个系統，全用 $S2$ 的公理(但把 $B8$ 写成純 F 命題，另把“◇”看作新原始概念，与“F”不能互相定义，引入相当的◇公理). 但 $S2$ 系統原来便可以不用“◇”而全改用“F”表示的，因此可以說 $S2$ 系統全部包括在 Emch 的系統內，难怪 Lewis[2] 說：Emch 系統与 $S2$ 基本上一样了.

Vredenduin 提出一个系統 V，在 $S1$ 之上不加 $B8$ 而改加 $FF_{\alpha\beta}FK_{\alpha\gamma}K_{\beta\gamma}$ 及

---

1) 在本节內，我們把“α 蘊涵 β”記为“$F_{\alpha\beta}$”，但必須注意，它和前面几节的 $F_{\alpha\beta}$ 不同，那是 $\Box C_{\alpha\beta}$ 的另一写法，此处則是一个新的原始概念.

$FKF_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}FK_{\alpha\gamma}K_{\beta\delta}$，因此这系統的純$F$命題介于 $S1$ 的与 $S2$ 的之間.

Emch 系統与系統V虽则形式上包含了 $S2$ 或 $S1$，但因不把“$FN_{\alpha\alpha}$”解释为必然，所以蘊涵怪論不发生(見后).

此外 von Wright[2] 及 Hungtington 都另提有新系統，后者尤其值得注意，但与本文关系較少，現在不詳細討論了.

上面各系統(尤其 Emch 的及 Vredenduin 的)大抵以 $S1$ 或 $S2$ 为根据而作的，照本文上面的討論若以系統甲为根据应当更好，故得第一个蘊涵系統如下:

1. 設选择二值系統的公理使得均呈 $C_{\alpha\beta}$ 形，这时我們取 $F_{\alpha\beta}$ 为公理.

2. $FF_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}$.

3. $F_{\alpha\beta}$, $\alpha\to\beta$　(分离原則)

4. α, $\beta\to K_{\alpha\beta}$　(合取原則)

5. $FC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}, F_{\alpha\beta}\to F_{\gamma\delta}$.

6. $GC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}\to GF_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$.

照这样写来这系統沒有推論定理，如果想使这个系統具有推論定理，最后两条公理須改为:

5′ $FKFC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$.

6′ $FGC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}GF_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$.

这样，这系統便具有 FK 推論式(如把 5′, 6′ 中的第一个“F”改为 C，則具有C推論式).

讀者不难看見，这公理系統与系統甲的几乎全同(不过把“$\Box C_{\alpha\beta}$”换写为“$F_{\alpha\beta}$”罢了)，因此其詳細性質今不一一列举了(参見系統甲的性質卽得). 讀者必会发生疑問: 系統甲处出現的蘊涵怪論不是会重新出現么?

事实上，在系統甲中所以出現蘊涵怪論，因为在那里把“$\Box$”讀作“必然”，而“必然”在直觉上又有相当确定意义的緣故. 現在把“$F_{\alpha\beta}$”与“必然”絕緣，两不相干，上面的蘊涵怪論便沒有了. 我們試来检查看.

首先，在这系統內的确还有

$$F_{\alpha}A_{\beta}N_{\beta},\qquad FK_{\beta}N_{\beta\alpha}$$

但这两命题可以不当作怪論(如果我們相信 Lewis 的辯护詞的話). 至于其它两个怪論，其出現的来源在于，由

$$F_{\alpha}C_{\beta\alpha},\qquad FN_{\alpha}C_{\alpha\beta}$$

应用必然分离原則而得

$$\Box\alpha\to F_{\beta\alpha};\qquad \Box N_{\alpha}\to F_{\alpha\beta}.$$

但在本系統內，必須先有 $FC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}$ 形的形式定理才能得出規則“$F_{\alpha\beta}\to F_{\gamma\delta}$”，因此这两怪論不会出現的. 如果我們把 $F_{\alpha}C_{\beta\alpha}$ 及 $FN_{\alpha}C_{\alpha\beta}$ 改写成 $FCN_{\alpha\alpha}C_{\beta\alpha}$ 及 $FC_{\alpha}N_{\alpha}C_{\alpha\beta}$，那末我們可以得出:

$$FN_{\alpha\alpha}\to F_{\beta\alpha};\qquad F_{\alpha}N_{\alpha}\to F_{\alpha\beta}$$

了. 但这时并沒有什么“怪”，因为由 $FN_{\alpha\alpha}$ 及 $F_{\alpha\alpha}$ 可得 $FA_{\alpha}N_{\alpha\alpha}$，旣然我們承認 $F_{\beta}A_{\alpha}N_{\alpha}$ 那末得出 $F_{\beta\alpha}$ 当无足怪了. 又由 $F_{\alpha}N_{\alpha}$ 及 $F_{\alpha\alpha}$ 可得 $F_{\alpha}K_{\alpha}N_{\alpha}$，旣然我們承認 $FK_{\alpha}N_{\alpha\beta}$，那末得出 $F_{\alpha\beta}$ 当无足怪了. 再换一个看法，如果由 N_{α} 而能推出 α，那意思是由最反对 α

的命題也推出 α，那末由任何命題当然可以推出 α 了；如果由 α 而推出 N_α，則由 α 既能推出最反对 α 的命題，当然可以由 α 推出任何命題了．这并沒有任何奇怪之处．

此外，在这个系統中还可推出下列命題：

$$GF_{\alpha\beta}F_\alpha K_{\alpha\beta},\quad GF_{\alpha\alpha}F_{\beta\beta},\quad GF_{\alpha\beta}FK_\alpha N_\beta NK_\alpha N_\beta,\quad GF_{\alpha\beta}FNAN_{\alpha\beta}AN_{\alpha\beta}$$

这些都可以仿上面的討論那样，看出沒有任何奇怪．反之，在这系統內并沒有 $FF_{\alpha\beta}F_{\gamma\gamma}$ 而只有“$F_{\alpha\beta}\rightarrow F_{\gamma\gamma}$”，后者当然沒有什么問題，因为“$\rightarrow$”并不表示蘊涵关系，而只表示“$F_{\alpha\beta}$ 眞时 $F_{\gamma\gamma}$ 亦眞”，既然后者永眞，这句話并沒有任何不妥之处．

經过这样討論，讀者当可相信这个系統的合用处了．在这个系統的基础上，我們再引入模态概念，自会得到更为完美的模态系統．

設仍以“□”表示必然．我們引入下五个公理：

$$F\Box\alpha\alpha$$

$$F\Box K_{\alpha\beta}\Box\alpha$$

$$FK\Box\alpha\Box\beta\Box K_{\alpha\beta}$$

$$FF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$$

$$FF_{\alpha\beta}\Box C_{\alpha\beta}$$

换言之，我們把系統庚及癸的公理都引入了．如果把这些公理引入二値系統（乃至系統甲）去，我們得到蘊涵怪論，但若引入我們的蘊涵系統来，却完全与直觉符合，沒有任何怪論发生．

为什么呢？因为从前把“$\Box C_{\alpha\beta}$”讀为“α 蘊涵 β”，这样才引起蘊涵怪論，現在我們把“$\Box C_{\alpha\beta}$”不作这样讀，自然任何蘊涵怪論都一笔勾銷了．今試举若干例如下．

在系統癸中，由 $F_\alpha C_{\beta\alpha}$ 而得 $F\Box\alpha F\Box\beta\Box\alpha$，但依我們的公理，只能或者得 $FN_{\alpha\alpha}\rightarrow F_{\beta\alpha}$（討論已見上）或者得 $F\Box\alpha\Box C_{\beta\alpha}$．这是沒有任何毛病的．注意这时不能把 $\Box C_{\beta\alpha}$ 改写成 $F_{\beta\alpha}$（当然更不能再应用一次公理而得 $FF_{\beta\alpha}F\Box\beta\Box\alpha$，与上合併利用可传性得 $F\Box\alpha F\Box\beta\Box\alpha$）．可見怪論的发生在于把“$\Box C_{\beta\alpha}$”改写成“$F_{\beta\alpha}$”而致．

其它的蘊涵怪論都可仿此討論．

因此我們的蘊涵系統以及我們的模态系統都完全合用而沒有任何怪論出現，这才是理想的沒有怪論的蘊涵系統．不过在这个系統中，模态辞是有无穷多种的，比如 $\Box\alpha$ 与 $\Box\Box\alpha$ 便未必等价．这本来也沒有什么不方便的地方．不过有好些邏輯家要求縮約高級模态命題（有些人，如 Carnap[1] 还提出好些理由），对于这些邏輯家来說，可再补充下列公理：

$$F\Box\alpha\Box\Box\alpha \quad \text{或甚至于} \quad F\Diamond\alpha\Box\Diamond\alpha$$

如用前者則只剩下十二个純粹模态辞，如用后者則只有四个，讀者可以自行推演（可参看作者另一文[2,3]）．

当然，也有人堅决主张要有无穷多种模态辞的（如 Churchman）．

上面这个系統是够满意的，如果我們容忍 $F_\alpha A_\beta N_\beta$ 及 $FK_\beta N_{\beta\alpha}$ 的話．但是也許有人对这两个命題也不愿意容忍，那末作者还可以介紹下列的系統．这个系統的純 FN 公理部分，老早已由作者[4]于 1950 年得到，但由于无法处理 KA 公理，后来被迫放弃了．現在已能对 KA 公理加以处理，所以特再次介紹出来，以供讀者研究．

上系統是純F命題弱而 KA 命題強，本系統則是純F命題強，KA 命題弱. 除分离原則及合取原則外各公理如下:

1. F_{pp} 2. $F_{\alpha}FF_{\alpha\beta\beta}$ 3. $FF_{\alpha}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ 4. $FF_{\alpha\beta}FF_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$

5. $FF_{\alpha}N_{\beta}F_{\beta}N_{\alpha}$ 6. $FNN_{\alpha\alpha}$ 7. $FK_{\alpha\beta}K_{\beta\alpha}$ 8. $FKK_{\alpha\beta\gamma}K_{\alpha}K_{\beta\gamma}$

9. $F_{\alpha}K_{\alpha\alpha}$ 10. $FK_{\alpha\alpha\alpha}$ 11. $FF_{\alpha\beta}FK_{\alpha\gamma}K_{\beta\gamma}$ 12. $FA_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}$

13. $FAA_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha}A_{\beta\gamma}$ 14. $F_{\alpha}A_{\alpha\alpha}$ 15. $FA_{\alpha\alpha\alpha}$ 16. $FF_{\alpha\beta}FA_{\alpha\gamma}A_{\beta\gamma}$

17. $FK_{\alpha}A_{\beta\gamma}AK_{\alpha\beta\gamma}$ 18. $FF_{\alpha\beta}AN_{\alpha\beta}$ 19. $FK_{\alpha}NK_{\alpha\beta}N_{\beta}$ 20. $FKN_{\alpha}N_{\beta}NA_{\alpha\beta}$

21. $FNA_{\alpha\beta}KN_{\alpha}N_{\beta}$ 22. $A_{\alpha}AN_{\alpha\beta}$

这里公理数目較多一些，也許有些不是互相独立的. 在这系統內，最突出的特点是: 它沒有 $FK_{\alpha\beta\alpha}$ 及 $F_{\alpha}A_{\alpha\beta}$. 曾有人質問（比如 Bronstein[1]），由 $K_{\alpha\beta}$ 的确可得 α，如果其間不是根据蘊涵关系又是根据什么关系呢？其实，由 $K_{\alpha\beta}$ 而得 α，只是在两个已眞命題之中，选取一个来使用，这的确不能算是蘊涵关系. 比如，由 $a + a = 2a$ 作代入得 $b + b = = 2b$，我們承認由前者代入而得后者，但幷非由前者推出后者. 在作这样看法时，的确也沒有引用蘊涵关系. 因此不承認 $FK_{\alpha\beta\alpha}$ 未为不可. 至于不承認 $F_{\alpha}A_{\alpha\beta}$ 更不成問題，从来沒有人从α去“推出” $A_{\alpha\beta}$ 的，也的确有人怀疑α与 $A_{\alpha\beta}$ 之間的关系是否可以叫做蘊涵关系的（比如 Nelson[1]）.

事实上，通常所承認的蘊涵关系具有下列特点:

1. 适用分离原則（这是当然的）.

2. $FK_{\alpha\beta\gamma}, \alpha \to F_{\beta\gamma}$.

3. 多余前提悉删. 故一旦发覺在証明过程中完全不用到某假設，卽把該假設省去（如果硬要不省，也只是由于人們习惯于 $FK_{\alpha\beta\alpha}$ 之故才容忍下来）.

从这几点看来，的确只有后面这个系統才反映得最全面（前一系統不具有第二、三性質）. 后面这个系統內又推不出 $F_{\alpha}A_{\beta}N_{\beta}$ 及 $FK_{\beta}N_{\beta\alpha}$，这更把一点点儿的怪論也取消了.

对后面这个系統唯一不滿意的是: 通常我們說“如果 $F_{\alpha\beta}$ 及 $F_{\beta\gamma}$ 則 $F_{\alpha\gamma}$”，而这系統却表示为:“如果 $F_{\alpha\beta}$ 則如果 $F_{\beta\gamma}$ 則 $F_{\alpha\gamma}$”，这与通常习惯不合. 不过这也許是因为后者太不順口了，人們才习惯于照前面那样讀法，无論如何，后面这个表示法，卽使与通常的讀法不符合，从来沒有人提出疑問过——只有 Lewis[1] 是例外，他公开的怀疑 $FF_{\alpha\beta}FF_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$ 的合法性. 不过自从他提出怀疑以后，未見任何人附議，看来这个怀疑是站不住脚的.

这是作者提出的第二个蘊涵系統，在这系統之上也可引入模态概念而組成模态系統，与上系統的情形完全一样，就不多說了.

参 考 文 献

沈有鼎 初基演算. 数学学报 7卷 (1957) 132—142 頁.

莫紹揆 [1] 普否系統、直覺系統、共否系統及其它（未发表）.

[2] 具有有穷个模态辞的模态系統. 数学学报 7卷(1957) 1—27 頁.

[3] 基本有穷模态系統，数学学报 8 (1958) 153—180.

[4] (Moh Shaw-Kwei) The deduction theorems and two new logical systems. *Methodos*, **2** (1950), 56—75.

Bronstein, D. J., The meaning of implications, *Mind*, **45** (1936), 157—180.

Carnap, R., Modalities and quantification, *Journal of symbolic logic*, **11** (1946).

Churchman, C. W., On finite and infinite modal systems, *Journal of symbolic logic*, **3** (1938).
Emch, A. F., [1] Implication and deducibility, *Journal of symbolic logic*, **1** (1936), 26—35, also 58.
[2] Deducibility with respect to necessary and impossible propositions. *ibid*, **2** (1937), 78—82.
Feys, R., [1] Les logiques nouvelles des modalités, Revue néoscolastiques de philosophie, **40** (1937—8).
[2] Les systèmes formalises des modalités aristotéliciennes, Revue philosophique de Louvain, **48** (1950), 478—509.
Fitch, F. B., Modal functions in the two-valued logics, *Journal of symbolic logic*, **2** (1937), 73—76.
Huntington, E. V., Note on a recent set of postulates for the calculus of propositions, *Journal of symbolic logic*, **4** (1939).
Halldén, S., A question concerning a logical calculus related to Lewis'. *Theoria*, **14** (1948).
Lemmon, E. J. and Meredith, C. A. etc., Calculi of pure strict implication, 1957 (油印本).
Lewis, C. I., [1] (and Langford, C. H.) Symbolic Logic, New York, 1932.
[2] Emch's calculus and strict implication, *Journal of symbolic logic*, **1** (1936), 77—86.
Łukasiewicz, J., [1] Aristotle's Syllogistic, 1951.
[2] A system of modal logic, *The journal of computing systems*, **1** (1953), 111—149.
Malcolm, N., The nature of entailment. *Mind*, **49** (1940) 335—347.
Meredith, C. A., see Lemmon, E. J. etc.
Nelson, E. J., Intensional relations, *Mind*, **39** (1930), 440—453, also, **45** (1936), 551.
Parry, W. T., Modalities in the survey system of strict implication. *Journal of symbolic logic*, **4** (1939).
Takeo Sugihara, [1] Strict implication free from implicational paradoxes, Memoires of the Faculty of Liberal Arts, Fukui University, ser. 1, 4 (1955), pp. 55—59.
[2] The axiomatization of the Aristotelian modal logic, *ibid*. ser. 1, 2 (1953), 53—60.
Toms, E., Fact and entailment, *Mind*, Vol. 49 (1940), pp. 451—4.
Vredenduin, A system of strict implication, *Journal of symbolic logic*, **4** (1939), 73—76.
von Wright, G. H., [1] Essays on Modal Logic, Studies in Logic, *Amsterdam*, 1951.
[2] A new system of modal logic, Actes du XI ième Congrès international de Philosophie, vol. V, Logique etc., 1953, pp. 59—63.
Naoto Yonemitsu, [1] A decision method and a topological interpretation for systems of logical implication, Memoires of the Okasa University of the Liberal Art and Education, *B. Nat. sci.* **3** (1954), 6—20.
[2] A note on systems of logical implications, *ibid*. pp. 21—24.

THE MODAL SYSTEMS AND IMPLICATION SYSTEMS

Moh Shaw-kwei

(*Nanking University*)

Abstract

We make use of Łukasiewicz symbols with the following addition: $\Box\alpha$ (it is necessary that α) $F_{\alpha\beta}$ $(=\Box C_{\alpha\beta})$ and $G_{\alpha\beta}$ $(=KF_{\alpha\beta}F_{\beta\alpha})$.

We start with the weakest (with quite few exceptions) basical modal system A, axiomatized as follows:

1. Whenever α is an axiom of the traditional two-valued system, then $\Box\alpha$ is an axiom of the system A.
2. $F\Box\alpha\alpha$.
3. $F_{\alpha\beta}, \alpha \rightarrow \beta$.
4. $F_{\alpha\beta}, \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$.
5. $\alpha, \beta \rightarrow K_{\alpha\beta}$.
6. $G_{\alpha\beta} \rightarrow G\Box\alpha\Box\beta$.

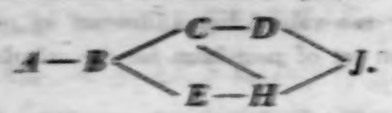
We strengthen the system A by addition of the respective axioms or rules:

B: $F_{\alpha\beta} \to C\Box\alpha\Box\beta$. C: $CF_{\alpha\beta}C\Box\alpha\Box\beta$. D: $FF\alpha\beta C\Box\alpha\Box\beta$.

E: $F_{\alpha\beta} \to F\Box\alpha\Box\beta$. F: $C + E$. G: $D + E$.

H: $CF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$. I: $D + H$. J: $FF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$.

The relation of them may be schematized as follows (from weak to strong):



When the system X is added the axiom/rule $CG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$, $FG_{\alpha\beta}G\Box\alpha\Box\beta$, $\alpha \to F_\beta K_{\alpha\beta}$ (equivalent to $\alpha \to \Box\alpha$), $\alpha \to FF_{\alpha\alpha}$, $C_\alpha FF_{\alpha\beta\beta}$, $F_\alpha FF_{\alpha\beta\beta}$, then the resulting systems will be denoted X_1, X_2, X^*, X_a, X_b, X_c respectively.

By combining some of these additions, we would have, apparently, 240 systems. Yet many of them are identical.

In fact, we have

(1) $H = H_1$, $I = I_1$, $J = J_1 = J_2$.

(2) $B^* = E^*$, $C^* = D^* = F^* = G^*$, $H^* = I^* = J^*$, $X_1^* = X_2^*$.

(3) $B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $E_1 = H_1 (= H) = F_1$, $G_1 = I_1 (= I)$.

(4) $E_2 = F_2 = G_2 = H_2 = I_2 = J_2$.

(5) $X_b^* = X_c^*$, $X_a + \Box F_{\alpha\alpha} = X^*$ (Hence $X_a^* = X^*$).

(6) $B_b + \Box F_{\alpha\alpha} = E_c$, both are identical with two-valued system. Hence we have at most 65 distinct systems (two-valued system excluded).

We show that $G = S2$, $J = S3$, and the asserted propositions in J^* are the same as that in $S4$, yet the rules of procedure of them are different.

We would meet paradoxes of implication even in the weakest system A, e. g., we have $\Box\alpha \to F_{\beta\alpha}$ and $\Box N_\alpha \to F_{\alpha\beta}$. Hence the writer of the present paper would propose two new implication systems instead. In these two new systems, the concepts $F_{\alpha\beta}$ and $\Box\alpha$ are both primitive, neither of them can be defined by the other.

The first implication system may be axiomatized as follows:

1. Let the axioms of two-valued system be given in the form $C_{\alpha\beta}$, then $F_{\alpha\beta}$ are the axioms of this system.

2. $FF_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}$. 3. $F_{\alpha\beta}, \alpha \to \beta$. 4. $FC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}$, $F_{\alpha\beta} \to F_{\gamma\delta}$.

5. $\alpha, \beta \to K_{\alpha\beta}$. 6. $GC_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta} \to GF_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$. 7. $FK\Box\alpha\Box\beta\Box K_{\alpha\beta}$.

8. $FF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$. 9. $F\Box\alpha\alpha$. 10. $FF_{\alpha\beta}\Box C_{\alpha\beta}$.

11. $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\alpha$.

The second implication system reads as follows:

The rule of detachment and the rule of conjunction.

1. $FF_pF_{rq}F_{pq}$. 2. F_pFF_{qp}. 3. $FF_{pq}FF_{qr}F_{pr}$. 4. F_{pp}.

5. $FF_pN_qF_qN_p$. 6. FNN_{pp}. 7. $FK_{pq}K_{qp}$. 8. $FK_pK_{qr}KK_{pqr}$.

9. FK_{ppp}. 10. F_pK_{pp}. 11. $FF_{pq}FK_{pr}K_{qr}$.

12—16 (the same as 7—11, with "K" replaced by "A").

17. $FK_pA_{qr}AK_{pqr}$. 18. $FF_{pq}AN_{pq}$. 19. $FK_pNK_{pq}N_q$.

20. AN_pA_{pq}. 21. $FKN_pN_qNA_{pq}$. 22. $FNA_{pq}KN_pN_q$.

23. $FK\Box\alpha\Box\beta\Box K_{\alpha\beta}$. 24. $F\Box K_{\alpha\beta}\Box\alpha$. 25. $FF_{\alpha\beta}F\Box\alpha\Box\beta$.

26. $F\Box\alpha\alpha$. 27. $FF_{\alpha\beta}\Box C_{\alpha\beta}$.

第9卷 第2期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 2
1959 年 6 月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1959

Saks 空間及其在綫性算子理論中的应用

W. Orlicz (Poznan)

如所周知，泛函分析的应用是与相应的綫性空間的选择以及与相应的收斂概念的选择相关联的．今后永远用X表示实綫性空間，所以是一抽象元$x, y, z, \cdots$的集，其中定义了两种基本运算，即元的加法$[x+y=z]$，以及元与实数的乘法$[tx=y]$，这些运算遵守平常代数中的自然規律．

如所周知，对于綫性空間，我們引入所謂範数，就是說，在X中定义一个非負实値函数$\|x\|$，$x\in X$，使得下列諸条件滿足：1）$\|x\|=0$的必要与充分条件乃是$x=\Theta$［这里Θ表示空間X中所謂零元］；2）$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，$x, y\in X$，这乃是說，範数滿足三角形条件；3）对于任意实数$t$与$x\in X$，有$\|tx\|=|t|\|x\|$，这就是說，我們要求範数是齐性的．

我愿意在这里簡短地回忆一下，即在很多研究中我們不得不把条件引用一个較弱的代替，即只要求积tx按照两个变量t, x的連續性．这样推广了的範数按照波兰学派的术語叫做F-範数．既然在我的报告里只将給出对某些問題的概述，我只限于考虑賦齐性範数的空間，这就是說，我在下面永远假定範数$\|x\|$滿足条件3)，所以它是齐性的．賦有範数的綫性空間叫做綫性賦範空間，这是大家熟知的．现在設給出一个綫性賦範空間．我們現在在它里面定义收斂概念，即所謂範数收斂，如下：

X中一列元x_n叫做收斂于元x_0，$x_0\in X$，是指当$n\to\infty$时，$\|x_n-x_0\|\to 0$．于是我們說列x_n按照範数收斂于x_0，用符号表示成$x_n\to x_0$．如果X按照範数收斂是完备的，换句話說，如果对于每个 Cauchy 列存在一个极限元，那末如所周知，X叫做 Banach 空間．［Banach 空間也簡称 B-空間］．除範数收斂之外，在賦範空間中还使用另外一种收斂，这就是所謂弱收斂．对于我們的目的，現在并不需要叙述弱收斂的定义．

現在已經可以看出，在应用中，屡次发生这样的事情，即使用範数收斂以及弱收斂都不很方便．我愿用一个例說明一下．用$C(-\infty,\infty)$表示在整个数直綫上一切有界并連續的函数的空間．如果在$C(-\infty,\infty)$中引入平常的齐性範数

$$\|x\|=\sup_{(-\infty,\infty)}|x(t)|,$$

那末$C(-\infty,\infty)$变成 Banach 空間．相应的範数收斂恰好就是指在全数直綫上一致收斂．但我們还可以用一自然方式引入另一种收斂概念，我将管它叫做ω-收斂．

$C(-\infty,+\infty)$中一列元x_n（函数）叫做ω-收斂于x_0，是指

1° 存在常数K，使$\sup\limits_{(-\infty,\infty)}|x_n(t)|\leqslant K$, $n=1, 2, \cdots$；

2° 列$x_n=x_n(t)$在整个直綫上殆一致收斂于$x_0(t)$．

但上面引入的ω-收斂并不与範数收斂，也不与弱收斂等价．为把此例中所提出的事实說得更清楚，我們在$C(-\infty,\infty)$中还定义一个第二範数$\|x\|^*=\sup\limits_{(n)}\frac{1}{n}\sup\limits_{(-n,n)}|x(t)|$.

于是很清楚，ω-收斂乃是指下列事实：

1° 存在常数 K，使 $\|x_n\| \leqslant K$，$n = 1, 2, \cdots$；

2° 当 $n \to \infty$ 时，$\|x_n - x_0\|^* \to 0$.

这种收斂可以恰切地叫做双範收斂。已經可以看出，这种收斂概念在泛函分析的应用中有一定的意义，从而根据这点，我們在波兹南近些年来研究了双範收斂. 关于这个問題，A. Alexiewicz 与我和 Z. Semadeni 曾发表了一些著作. 虽然直到现在为止所得到的結果一部分还是属于初等泛函分析，但把开始了的工作継續下去似乎是有价値的. 正是根据这点，我才愿意把一些結果与应用向你們报告.

现在回到空間 $C(-\infty, \infty)$ 的那个例. 在这例中所指出的情况使我們提出下列的概念来. 設 X 是賦範綫性空間，范数是 $\|\ \ \|$. 我們管这个范数叫做基本范数. 我們假定在基本範数之外，在 X 中还定义一个第二範数 $\|\ \ \|^*$，我們管它叫带"星号"的範数. 我們现在考察集

$$X_s = \{x: x \in X, \|x\| \leqslant 1\}.$$

在这集中借下列公式引入距离：对于 $x_1, x_2 \in X_s$，令

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|^*.$$

如果 X_s 是完备空間，那末我們管它叫做 Saks 空間([7])[1]. 我們管这类空間叫做 Saks 空間，是为了紀念卓越的波兰数学家 Stanistaw Saks. Saks 是使用这种空間的第一个人，他是在他发表于 1932 年的一篇著作中在一特例中使用的. Saks 在上次世界大战时做为德国法西斯秘密警察的牺牲品而丧失了生命. 带有"星号"的範数，以及所引入的距离，对应 X_s 中一种收斂概念：如果 $x_n \in X_s$，列 x_n 叫做 ω-收斂于 $x_0 \in X_s$，用符号表示成 $x_n \xrightarrow{\omega} x_0$，是指 $d(x_n, x_0) = \|x_n - x_0\|^* \to 0$. X_s 中的 ω-收斂乃是一种双範收斂，这是借基本範数与带星範数作出的，但是要限制在单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 之上. Alexiewicz 与 Semadeni 两位先生在他們最近的著作中([1]，[2]) 考虑了整个空間 X 并在它里面借条件 1°, 2° 引入一种 ω-收斂(双範收斂). 他們主要研究了关于这种类型的拓扑綫性空間的种种結构性問題. 借引入 Saks 空間如上，就可以避免使用一般的拓扑概念，并且也得到很多从应用观点看来的其它优点(使用所謂網原理的可能). 但显然綫性賦双範空間与 Saks 空間是紧密联系着，至少在有关綫性泛函分析的一些問題方面. 在这里我愿意指出，在 Saks 空間的定义中，并不假定基本空間 X 按範数 $\|\ \ \|$ 或按範数 $\|\ \ \|^*$ 是完备的. 我还愿意强調，可以按种种方式使 X_s 成为 Saks 空間. 事实上可以在同一集 X_s 中引入不同的、有时甚至是不等价的範数. 这是非常显然的，因为自然我們永远可以取基本範数作带"星号"的范数，就是說 $\|x\|^* = \|x\|$. 但平常还可能引入其它有用的带"星号"的範数，正是这点使得有可能发展一套特殊理論. 特殊情形 $\|x\| = \|x\|^*$ 自然并不是什么新的，因为在这情形下 X_s 看作 Saks 空間就是 Banach 空間的单位球.

现在轉向叙述有关 Saks 空間的某些問題. 在 Saks 空間的理論中，我們追求这样的目的，即提出与 Banach 空間理論中类似的定理. 自然要处理的是那些可能在綫性方程理論、在直交級数理論、在求和法理論以及其它方面有应用的那些定理. 所論及的是

---

1) 方括号中的数字表示文献目录中的論文号数.

关于綫性泛函数与算子的种种定理. 首先是下列定义: 令U表示X上一个分配性算子, 它的值是取自一个賦範空間 Y (換句話說, 由X到Y中的分配性映象: $U(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda U(x_1)+\mu U(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$, λ, μ 是实数). 这样一个算子叫做在 X_s 上綫性, 是指它在 X_s 上連續. 所以这意味着: 这是指由 $x_n, x_0 \in X_s$, $\|x_n - x_0\|^* \to 0$ 可以推出关系 $U(x_n) \to U(x_0)$ 来. 特别如果 Y 是一切实数的空間, 那末, 按照流行的用法, 我們管定义在 X_s 上的綫性算子叫做綫性泛函数. [这时不用字母 U 而用 ξ 表示]. 在一 Saks 空間 X_s 上永远存在非不足道的綫性泛函数, 因为无論如何 X_s 上每个分配性的并且按带星号的範数連續的泛函数必是連續的. 这是一个不足道的註記. 如果用Ξ表示 X_s 上一切綫性泛函数的全体, 用 Ξ^* 或 Ξ 各表示按范数 $\|\ \|^*$ 或 $\|\ \|$ 的綫性泛函数的集合, 并且此外还假定 $\|x\| \geqslant \|x\|^*$ (这个不等式在大多数情形是可以假定的), 那末下列关系成立:

$$\Xi^* \subset \Xi_s \subset \Xi.$$

Ξ_s 是否 Ξ 的眞子集, 或者 Ξ^* 是否 Ξ_s 的眞子集, 自然依賴于带星号的範数的选擇. 无論如何, 下列命題仍是几乎显然的: 如果 $\xi_n \in \Xi^*$, 而且 $\xi_n(x) \to \xi(x)$ 在 X_s 上一致成立, 那末极限泛函数必在 Ξ_s 中, 这就是說, 它在 X_s 上連續([8]). 本定理的逆也是眞的, 但自然証明不那末簡单([1]). 最后举出的这一定理使得可能在很多具体 Saks 空間的情形决定 Ξ_s 中泛函数的一般形状(参看例如 [1], [2], [3], [6], [8]). 但关于这个問題, 现在我不預备深入. 我們現在轉向綫性泛函数列的研究. 設 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是 Saks 空間 X_s 上的綫性泛函数. 我們所关切的乃是下列定理的成立. 对于 Banach 空間, 类似的定理属于泛函分析的古典性定理的范围, 并且具有很多应用:

A. 如果对于每个 x, $\xi_n(x) \to \xi(x)$ 收歛, 那末 ξ 必是 X_s 上的綫性泛函数.

B. 如果对于每个 $x \in X$, $\xi_n(x) \to \xi(x)$, 那末 ξ_n 必在零点处等度連續(在空間 X_s 中).

[自然由 B 可推出 A, 所以 B 是比 A 更深远的要求].

C. 使得列 $\xi_n(x)$ 收歛的那些点 x 的集 C 或者是 X_s 中的 Baire 第一綱集, 或者与 X_s 相同.

我已經指出过, 对于 Banach 空間, 类似的定理是熟知的. 对于 Banach 空間, 定理 A 是古典的 Baire 定理的一个簡单的推論. 因为依照 Baire 定理, 极限泛函数 ξ 一定在一剩余集上連續. 但有一簡单命題成立, 即如果一个分配性泛函数在一点处連續, 那末它已經在遍处連續了. 同理可証关于 Banach 空間的定理 B, 我們只須应用 Baire 定理的加強形式, 依照这个定理, 由殆遍收歛可以推出在一剩余集上的等度連續性. 对于 Banach 空間, 定理 C 在 Banach-Steinhaus 定理的名义下为人所熟知. 对于 Saks 空間, 定理 A, B, C 并非不加条件就一般成立的. 我們可以由下列各例看出这一点: 設 X 是使級数 $\Sigma|t_\nu|<\infty$ 的一切数列 $x=\{t_\nu\}$ 的空間. 在 X 中引入基本範数

$$\|x\| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |t_\nu|,$$

以及带星号的范数

$$\|x\|^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} |t_\nu|.$$

我們考察相应的 Saks 空間 X_s, 它由滿足 $\Sigma|t_\nu| \leqslant 1$ 的一切数列 $x=\{t_\nu\}$ 組成. 我們考

察分配性泛函数 $\xi_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu$. 它們在 X_s 上是連續的,从而是 X_s 上的綫性泛函数. 对于每个 $x\in X$, 自然 $\xi_n(x)$ 收斂于 $\xi(x)=\Sigma t_\nu$, 但极限泛函数在 X_s 上不是連續的. 所以定理A对于这个空間是不成立的. 另一方面, 我們在这里自然可以应用已經提过的 Baire 定理, 所以 ξ 在 X_s 中一定有連續性点. 于是立刻可以注意到, 連續性点的集与集 $\{x:x\in X_s, \|x\|=1\}$ 相同,并且依 Baire 定理它一定是(在 X_s 中的)剩余集. 乍看来这是有些令人惊奇的. 但一切是就緒的,因为在我們这里所遇到的假定下[即 $\|x\|\geqslant\|x\|^*$], 每个 Saks 空間分解成两个集: 单位球 $\|x\|<1$ 的內部, 这永远是第一綱的, 以及其界(即单位球的表面),这一定是在 X_s 中剩余的. 无論如何,由所說的,我們看出下列結果: 由于极限泛函数在界上連續这一命題还不能推知它在 X_s 的一切点处連續,特別我們还不能結論說它在 $x=0$ 点处連續.

于是可提出下列問題,我愿把它作为一个未解决的問題提出:

为了对于一个 Saks 空間,定理 A,B, 或 C 成立,必要充分条件是什么?

自然我們很希望把这种条件在可用的形式下并且用泛函分析的概念表达出来. 我們在波兹南只提出了定理 A,B,C 成立的一些充分条件. 最簡单的乃是下列条件(Σ_1), 我現在陈述出来:

(Σ_1) 設給出一元 $x_0\in X_s$ 与一正数 ρ. 于是存在数 $\delta>0$, 使每个滿足 $\|x\|^*<\delta$ 的 $x\in X_s$ 可以表示成 $x=x_1-x_2$ 的形式, 这里 $x_1, x_2\in X_s$, 而且 $\|x_1-x_0\|^*<\rho$, $\|x_2-x_0\|^*<\rho$.

可以看出, 条件(Σ_1)在 Saks 空間的很多有趣的情形下是滿足的. 如果这一条件滿足,那末我們可以借 Baire 定理証明定理 A,以及更一般些的定理 B. 关于定理 C,情况又如何呢?

設 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是 X_s 上給出的綫性泛函数. 用 $\omega(x)$ 表示这一列在点 x 处的振动,也就是說,令

$$\omega(x)=\lim_{k\to\infty}\sup_{n,m>k}|\xi_n(x)-\xi_m(x)|.$$

用 μ 表示下列常数:

$$\mu=\lim_{\rho\to 0}\sup_{(n),\|x\|\leqslant 1,\|x\|^*<\rho}|\xi_n(x)|.$$

列 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 的收斂或发散的現象依賴于这个常数的性質. 在假定(Σ_1)一条件之下,下列成立:

D. 1° 如果 $\mu>0$, 那末在 X_s 中存在一个剩余集 $X_0\subset X_s$,使对于 $x\in X_0$, $\omega(x)\geqslant\frac{\mu}{2}$. 所以在这情形下发散性点的集是剩余集.

2° 如果 $\mu=0$, 那末或者列 ξ_n 遍处收斂,或者只在一个疏集上收斂([7],(Ⅱ)).

由此可以看出对于 Saks 空間,有 Banach-Steinhaus 定理的一个类似成立. 但要注意,这是在性質(Σ_1)的假定下. 事实上, 如果 $\xi_n(x)$ 在一第二綱集上收斂, 那末依照 1°, $\mu=0$, 而依照 2°, 既然 C 不是疏集,必然 $C=X_s$. 所以只有两种可能性: 或者 $C=X_s$, 或者 C 是第一綱集.

上面叙述的問題可以按不同方式推广. 首先可以把綫性泛函数换成綫性算子,更进

一步可以考虑依賴于一个参数的算子列，等等．代替条件(Σ_1)，还可以引入具有其它性质的条件，等等．此外，代替考察泛函数列的收斂，可以把它的有界性放在討論中．我还愿意叙述一下最后一类的一个定理．

假定(Σ_1)条件，再一次考察綫性泛函数列$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$，我們假定：

1）对于每个x，列是有界的，即$\xi_n(x) = O(1)$；

2）存在一点x_0，使$\xi_n(x)$发散；

3）在X_s中一个稠集上，列$\xi_n(x)$收斂．

在这些假定之下，有下列命題成立：

我們把一切列$\xi_n(x)$的全体T_0看作一切有界数列的空間T_b的一个子空間．我們把空間T_b看作按平常方式賦範的．那末T_0是不可分的([8])．

我将用几个例来説明 Saks 空間理論的应用可能性．我完全限于取自数列的綫性算子一般理論的例．設$A = (a_{in})$是一数陣，$x = \{t_\nu\}$是一数列．我們令

$$A_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{i\nu}|, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

对于一切i，作变式

$$A_i(x) = \sum_{1}^{\infty} a_{i\nu} t_\nu.$$

这对于有界数列是有意义的，如果我們假定对于一切i，$A_i < \infty$．为簡单起見，我們还假定更多一些，即設对于$i = 1, 2, \cdots$，$A_i \leqslant K$．于是諸$A_i(x)$对于一切有界数列是有意义的．在一切有界数列的全体X中，引入基本範数$\| x \| = \sup\limits_n |t_n|$与带星号的範数$\| x \|^* = \Sigma \frac{1}{2^\nu}|t_\nu|$．假定了这两範数的定义，集$X_s = \{x : \| x \| \leqslant 1\}$形成一个 Saks 空間，并且这空間滿足条件$(\Sigma_1)$．所以上面叙述的定理 A, B, C 是可以应用的．作为泛函数ξ_i，我們現在取变式$\xi_i(x) = A_i(x)$．立刻可以注意到［在所叙述的假定$A_i \leqslant K$之下］，

$$\mu = \limsup_{k \to \infty\,(i)} \sum_{\nu=k}^{\infty} |a_{i\nu}|.$$

应用定理 D，可以得出下列結果（参看[7]，(Ⅰ)）：

a）如果$\mu > 0$，那末对于每个有界数列，变式$A_i(x)$是有界的，但在x的一个剩余集［在X_s］上，列$A_i(x)$的振动超过数$\mu/2$．

b）如果$\mu = 0$，并且假定极限值

(*)　　$$\lim_{n \to \infty} a_{in} = a_i \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

存在，那末对于每个有界数列，諸变式$A_i(x)$收斂．

c）如果对于每个有界数列，列$A_i(x)$收斂，那末$\mu = 0$，并且（这是不足道的）(*)成立．

c）恰好就是熟知的 I. Schur 定理．在 c）中可以假定得少些，也就是說，不設对于每个数列收斂，只須要求在一第二綱集上列$A_i(x)$收斂．

現在举一个更有趣的例：

現在考察与陣$A = (a_{in})$相应的陣求和法．如所周知，数列叫做按A-求和等于值

$A(x)$，是指列 $A_i(x)$ 收斂于极限值 $A(x)$. 我們假定 A-方法是保存的. 在 A-方法之外，还考察一个第二种保存求和法. 設这相应于陣 $B=(b_{in})$，并且称做 B-方法. 下列符合性定理成立:

如果每个 A-可求和的有界数列是 B-可求和的，那末对于每个 A-可求和的有界数列，$A(x)=B(x)$.

这个定理，我曾于 1933 年与 Mazur 先生一起証明，并且不加証明发表于 Comptes Rendus 上([4]). 在 1943 年莫斯科的 Брудно 先生重新发現了我們的定理，并且把他自己的証明发表在 Матем. Сборник 16 (1945)的一篇著作中. Брудно 給出的証明是很复杂的，而我們自己的証明，只是在战后才发表的，也并不簡单([5]). 借 Saks 空間可把我們的符合性定理的証明化得非常簡单([7]，Ⅱ). 为了这一目的，我們用 X 表示按 A-可求和于极限值 0 的一切有界数列所組成的綫性空間. 在 X 中引入基本範数 $\|x\| \sup\limits_{(n)}|t_n|$. 我們現在按下列方式定义带星号的範数:

$$\|x\|^*=\sup_{(i)}|A_i(x)|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|t_n|.$$

考察集 X_s. 容易証明，这当眞是 Saks 空間，这就是說，它按范数 $\|\ \ \|^*$ 是完备的. 此外还有下列輔助定理成立: 考察具有下列属性的有界数列 x: 它只有有穷多項不等于 0，而且按絕对值不超过 1; 这些数列的全体在 X_s 中稠密(这个輔助定理的証明可以在著作[5]中找到). 我們用 X_s^0 表示这个稠集. 借上述輔助定理，我們首先証明，X_s 滿足条件(Σ_1). 現在可以应用定理 A. 令

$$\xi_i(x)=B_i(x), x\in X.$$

显然諸 ξ_i 是 X_s 上的綫性泛函数，而依我們的假定，$\xi_i(x)$ 在 X_s 上收斂于 $B(x)$. 但对于每个 $x\in X_s^0$，$B(x)=0$，因为已經假定 B-方法是保存的. 依定理 A，$B(x)$ 在 X_s 上連續，所以，旣然在稠集上，$B(x)=0$，那末对于每个滿足 $A(x)=0$ 的 A-可求和列 x，有 $B(x)=0$. 同时也一般地有 $A(x)=B(x)$，这可借保存性假定立刻看出.

定理 E, C 也可以在一般求和法理論的种种問題中有很好的用途. 在我的报告結束之际，再举定理 E 的一个簡单应用。考察两个保存的陣法 A 与 B，設 X_s 与在前例中具有同样意义. 仍令 $\xi_i(x)=B_i(x)$，而設至少对于一个有界并按 A-可求和于零的列 x_0，列 $B_i(x_0)$发散. 在这样假定之下，可以应用定理 D，于是得出下列結果: 一切数列 $B_i(x)(x\in X)$ 的全体在空間 T_b 中是不可分的. 特別，如果 B 表示单位方陣，从而 $B_i(x)=t_i$，我們就得出我和 Mazur 早在上述登載于 Comptes Rendus 上的那篇短文中叙述的定理. [这个定理此外还可以在 Agnew, Zeller 以及其他人的較晚的著作中重新找到]. 这一定理是: 設 A 是一保存的陣法，那末一切有界并按 A-可求和于零但不收斂的数列在空間 T_b 中或者不可分，或者根本上形成空集.

还应注意，不必通过巨大困难可以使一相类似的方法对于某些类似的問題有用. 事实上，Saks 空間在多重数列、函数-函数的变換、积分变換等等的求和法理論中的类似問題中有很好的用途.

参 考 文 献

[1] A. Alexiewicz and Z. Semadeni, Linear functionals on two norm spaces, *Studia Mathem.*, 17 (1958), 121—140.

[2] ————, A generalization of two norm spaces, *Bull. Ac. Pol.*, 6 (1957), 135—139.

[3] W. Matsuszewska and W. Orlicz, On a class of Saks spaces, *Bull. Ac. Pol.*, 5 (1957), 611—614.

[4] S. Mazur et W. Orlicz, Sur les méthodes linéaires de sommation, C. R. 196 (1933), 32—34.

[5] ————, On linear methods of summability, *Studia Math.*, 14 (1954), 129—160.

[6] Y. Musielak and W. Orlicz, Linear functional over the space of functions continuous in an open interval, *Studia Math.*, 16 (1956), 216—224.

[7] W. Orlicz, Linear operations in Saks spaces (I), *Studia Math.*, 11 (1950), 237—272; (II) *ibidem*, 15 (1956), 1—25.

[8] ————, Contribution to the theory of Saks spaces, *Fundamenta mathematicae*, 44 (1957), 272—294.

第9卷 第2期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 2
1959 年 6 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　June, 1959

論空間 l^α 与 L^α 的一些推广

W. Orlicz (Poznan)

自从 F. Riesz 的基础著作以来，空間 l^α 与 L^α 乃是赋範綫性空間的經典性例子. 所謂空間 l^α，乃是指使級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|t_\nu|^\alpha, \qquad \alpha>0$$

收斂的一切数列 $\{t_n\}$ 所組成的空間. 所謂空間 L^α，乃是指使积分

$$\int_a^b|x(t)|^\alpha dt, \qquad \alpha>0$$

有穷的一切可測函数所組成的空間. 如果在集合 l^α 或 L^α 中按照平常方式定义两元的加法与用数相乘的乘法，那末 l^α 与 L^α 成为綫性空間. 設 $\alpha\geqslant 1$，那末在 l^α 中可以引入一个齐性範数

$$\|x\|=\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|t_\nu|^\alpha\right)^{1/\alpha}, \qquad x=\{t_\nu\}.$$

但如果 $0<\alpha<1$，那末我們用另外方式定义范数，也就是令

$$\|x\|=\sum|t_\nu|^\alpha, \qquad x=\{t_\nu\}.$$

这个範数滿足平常条件：1) $\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0$ 蘊涵 $x=0$；2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，但这不是齐性的. 它滿足条件 $\|x\|=\|-x\|$，并且积 tx 按照两个变量(依相应的範数收斂)是連續的，这些性质代替了齐性. 按波兰的命名法，我們管这种範数叫做 F-範数，齐性範数叫做 B-範数. 所以，我們說当 $\alpha\geqslant 1$ 时，空間 l^α 是賦 B-範数的，而当 $1>\alpha>0$ 时，它是賦 F-範数的. 賦以上述的範数，空間 l^α 是完备的，这就是說：每个 Cauchy 元列一定收斂于一极限元. 如所周知，完备的賦 B-範綫性空間叫做 Banach 空間，而完备的賦 F-範綫性空間叫做 Fréchet 空間，或簡称 F-空間. 因此，我們可以說：当 $\alpha\geqslant 1$ 时，l^α，L^α 都是 Banach 空間，而当 $0<\alpha<1$ 时，它們是 Fréchet 空間.

在两次世界大战之間的年代里，大約在 1932 年，出現了种种著作，这些著作以空間 L^α，l^α 的一些推广作为研究对象. 在第二次世界大战之后，有些人把这方向的研究在很多方面作了推进. 特别渥龙涅日(Воронеж)的数学学派，以 Красносельский 先生为首，以及他的几位协作者，把他們自己所开始的研究作了进一步推进，并把推广了的空間 L^α 应用到非綫性积分方程理論中去. 在荷兰，这一类問題吸引了 Zaanen 先生及其协作者 Luxemburg 博士的注意. 这几位数学家也考虑了在积分方程理論中的一些应用. 在日本，在北海道大学，中野秀五郎教授与他的几位协作者曾建立了所謂模空間的一般理論. 这一理論在一定意义下把以前我，Краносельский，Рутицкий，Zaanen，Luxemburg 以及很多别的人所处理的，空間 l^α，L^α 的推广都作为特例包容了. 但附带注意，日本学派为了給他們的理論举例，他們所用的广义的空間 L^α，与在上述諸位数学家的著作中已經用到的是

相同的，从应用的观点看来，这在目前还不能算作是重要的推进。

那末，空間 l^α 或 L^α 的推广的思想主要是什么呢？我們可以这样地来把握．設 M 是对于一切实数 t 有定义的非負值函数．用 l^M 表示使級数

$$\rho(x) = \sum_{\nu} M(t_\nu) < \infty$$

的一切实数列 $x = \{t_\nu\}$ 的全体．如果在这里令

$$M(t) = |t|^\alpha, \qquad \alpha > 0,$$

那末可以看出，在这情形下，l^M 恰好就是空間 l^α．可以証明，在关于函数 M 的某些凸性条件之下(目前沒有必要把这些条件精确地提出)，l^M 是一 Banach 空間．为了获得空間 L^α 的推广，也可以同样处理．我們考察在 (a, b) 上使积分

$$\rho(x) = \int_a^b M(x(t))dt < \infty$$

存在的一切可測函数 $x = x(t)$ 的全体 L^M (自然，为了保証 $M(x(t))$ 的可測性，我們必須要关于 M 作一些假設，例如設它連續，或更一般些，設 M 是 Baire 函数)．自然，对于 $M(t) = |t|^\alpha, \alpha > 0$，我們仍获得古典的空間 L^α．

直到现在为止处理空間 l^α 与 L^α 的种种推广的著作都是限于使 l^M 或 L^M 为 Banach 空間的情形．在我的报告中，我将講述一些結果，这些結果是我与 Mazur 先生共同在一些时候之前获得的(S. Mazur & W. Orlicz: On some classes of linear spaces, *Studia Mathematica*, **17**(1958), 97—119 頁)．

在我們的研究中所考虑的乃是关于上述那类問題中的一些問題，但是从完全一般观点来看的，一般关于函数 M 并不假定連續性．我們可以把下列諸問題陈述成主要問題(設 X 表示 l 或者 L)．

I. 在什么时候集 X^M 形成一个綫性空間？

II. 在假定 X^M 是綫性空間之下，什么时候可以在 X^M 中引入一个 F-範数或 B-範数，使由 $\|x_n\| \to 0$ 可得 $\rho(x_n) \to 0$，并且反过来也成立？特別在什么时候 X^M 可以成为 Fréchet 空間或 Banach 空間？

关于上述两問題，我們将看到，可以給出很滿意的回答．按照我的意見，关于我們所考虑的問題还有更进一步发展的可能．如果有中国青年数学工作者对这問題感到兴趣并对于它的进一步发展有所貢献，我将是非常高兴的．

我将主要考察空間 l^M．对于这个数列空間，所获得的結果比对于函数空間 L^M 更为完备．此外，关于 l^M 与 L^M 的考虑一部分是非常相似，从而根据这点，沒有对空間 L^M 作詳細論述的必要。

我从下列的說明与定义开始．設 M, N (与以前一样)表示对一切 t 有定义的完全任意的非負值函数．为簡便起見，令

$$\rho_M(x) = \sum_{\nu} M(t_\nu), \qquad x = \{t_\nu\}.$$

我們也有时更簡单地写成 $\rho(x)$ 来代替 $\rho_M(x)$．[如果用 N 代替 M，我們也就相类似地写成 ρ_N]．l^M 表示使 $\rho_M(x) < \infty$ 的一切数列的全体．我們說函数 M 滿足条件(*)，是指它具有下列性質：

(*)关系 $M(t_n)\to 0$ 与关系 $t_n\to 0$ 等价. 这里 t_n 也可以等于 0.

由(*)自然可知 $M(0)=0$, 以及当 $t\neq 0$ 时必然 $M(t)\neq 0$. 两个函数 M, N 叫做等价——表示成

$$M\sim N,$$

是指存在正常数 $A, B, \varepsilon>0$, 使下列諸不等式成立:

$$\left.\begin{aligned} N(t)&\leqslant BM(t), &\text{如果 } M(t)\leqslant\varepsilon,\\ M(t)&\leqslant AN(t), &\text{如果 } N(t)\leqslant\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

如果两函数 M, N 都滿足条件(*),那末可以把上述的等价性定义化成更简单的形式: 即为了 $M\sim N$, 必須且只須存在正常数 A, B, 使在零点的某邻域中,关系(1)成立.

首先可以很初等地建立下列結果. 为了有等式 $l^N=l^M$, 必須且只須 $M\sim N$. 由这个輔助定理可以看出等价性概念对于整个理論的意义. 如果把一个函数 M 换成一个与它等价的函数,那末对于由 M 决定的数列集 l^M 并不发生任何影响. 可以很平凡地按次序注意到下列几点: (a)为了集 l^M 与一切数列的集相同,必須且只須对于一切 t, $M(t)=0$. (b) 为了集 l^M 与殆一切項为零的数列全体相同, 必須而且只須 $M(0)=0$ 并且存在数 $\delta>0$, 使得对于 $t\neq 0$, 有 $M(t)>\delta$.

在这些附註之后,我可以进而陈述下列定理,这个定理的証明并不那末显然.

定理 1: 在函数 M 可测与 l^M 为綫性的假定下,只有下列三个可能性:

(a) 对每个 t, 有 $M(t)=0$;

(b) 存在常数 $\delta>0$, 使当 $t\neq 0$ 时, $M(t)\geqslant\delta$, 并且 $M(0)=0$;

(c) M 滿足条件(*).

我提醒你們注意关于 M 可測的假定. 如果不作这一假定,定理 1 的主张就一定不正确. 这可以用例来証明. 无論如何,由定理 1 可以看出条件(*)在整个理論中的意义. 如果要求空間 l^M 的綫性,并把两个不足道的极端情形(a)(b)擱置在一边,那末条件(*)一定滿足. 正是根据这一点,所以才在下面的考察中关于函数 M 常假定它滿足条件(*). 但我們不必担心 M 的可测性. 这由下列定理可以看出:

定理 2: 如果 M 滿足条件(*)并且 l^M 是綫性的,那末必存在一个遍处連續的函数 N, 具有下列属性:

(a) $M\sim N$, 这就是說, $l^M=l^N$;

(b) N 是偶函数,并且对于 $t\geqslant 0$ 是单調递增的.

直到現在,我們关于在什么假定下能保証集 l^M 的綫性这一題目还只字未提. 但这一問題可以完全回答. 事实上,下列定理成立:

定理 3: 在条件(*)的假定下,为了 l^M 是綫性的,必須且只須下列諸条件滿足:

(a) 在零点的某邻域中,即当 $|t|\leqslant\varepsilon, |s|\leqslant\varepsilon$ 时,下列不等式成立:

$$M(t+s)\leqslant C(M(t)+M(s)).$$

(对于小 t 的广义三角形条件);

(b) 对于每个 $\rho>0$, 存在两个常数 $C>0, \delta>0$, 使得

$$\text{当 } |t|<\delta, |\omega|<\rho \text{ 时,有 } M(\omega t)\leqslant CM(t).$$

这乃是第一問題的完全解决,也就是关于 l^M 的綫性的問題. 我們可以对定理的上述陈述

提出反对，即条件(a)与(b)在具体情形下的驗証并不常是很簡单的．在实际中，只須考察单独一个非常簡单的条件来代替(a)(b)，这就是所謂 Δ-条件(对于小的 t)：

$$M(2t) \leqslant KM(t) \qquad 对于 \quad |t| < \eta.$$

事实上，依定理 2，可以把 M 用一个連續、对 $t \geqslant 0$ 遞增的偶函数代替，而容易証明，对于这样的函数，条件(a)，(b)与条件(Δ)等价．

現在将考慮第二个主要問題：在假定 l^M 是綫性之下，什么时候可能在 l^M 中引入一个 F-範数或 B-範数，使得它能适合 l^M 的結构．

答案仍是异常簡单的：

定理 4：設給出一个滿足条件(*)的函数 M，設 l^M 是綫性空間．在这些假定之下，可以在 l^M 中引入一个 F-範数，使得由关系 $\|x_n\| \to 0$ 可以推出关系 $\rho_M(x_n) \to 0$ 来，并且反过来的蘊涵也成立．空間 l^M，賦以这个範数，成为 Fréchet 空間，这就是說，它滿足完备性公理．

所以，我們可以看出，这个定理的意义在于：如果我們已經知道 l^M 是綫性的，那末由此自然得知 l^M 是 Fréchet 空間．但如何在 l^M 中定义所說的那种範数呢？定义这个範数的規定是很簡单的．首先，把 M 用任意一个与它等价的函数 N 代替，使 N 遍处連續，对于 $t \geqslant 0$ 是增的，并且具有屬性 $M(t) = M(-t)$．依定理 2 这經常是可能的．現在对于已知的元 $x \in l^M$ 考察不等式

$$\rho_N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_\nu N\left(\frac{|t_\nu|}{\varepsilon}\right) < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0. \qquad (+)$$

可以不足道地証明，当 $\varepsilon \to +\infty$ 时，$\rho_N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to 0$．这說明(+)一定能对于某个 $\varepsilon > 0$ 滿足．現在作滿足不等式(+)的一切正数 ε 的下端 $\inf \varepsilon$．令 $\|x\| = \inf \varepsilon$．这就是一切要作的．事实上，我們可以驗明，泛函数 $\|x\|$ 当眞具有 F-範数的一切屬性，并且此外关系 $\|x_n\| \to 0$ 与 $\rho_N(x_n) \to 0$ 是等价的．但既然 $M \sim N$，并且由这等价关系立刻得出关系 $\rho_M(x_n) \to 0$，$\rho_N(x_n) \to 0$ 的等价关系，于是就得出合适的 F-範数来，因为它适应空間 l^M 的結构．最后，非常容易的考慮可以証明完备性公理滿足．于是可以看出，l^M 可以看做是 F-空間．

最好在一个具体例的基础上把整个事情再弄清楚．令 $M(t) = |t|^\alpha$，$\alpha > 0$，并且按照上述的規定計算出範数 $\|\ \ \|$ 来．于是作 $\sum_\nu \left|\frac{t_\nu}{\varepsilon}\right|^\alpha \leqslant \varepsilon$，并計算下端．很不足道的計算引导出下列結果：

$$\|x\| = \inf \varepsilon = \left(\sum_\nu |t_\nu|^\alpha\right)^{1/1+\alpha}.$$

当 $\alpha > 0$ 时，甚至当 $\alpha \geqslant 1$ 时，这样决定的範数并不与平常的範数相同．无論如何，这是一个 F-範数，并且与平常的範数等价．对于 $\alpha \geqslant 1$，上面决定的範数不是齐性的，与平常的範数 $\|x\| = \left(\sum |t_\nu|^\alpha\right)^{1/\alpha}$ 不一样．但这已是完全另外一个問題了，即什么时候可以在 l^M 中引入齐性範数，換句話說，什么时候可以把 l^M 看成 Banach 空間．下列定理可以告訴我們这方面的事实，我把这个定理陈述成这一系列定理中的最后一个．

定理 5：設 M 满足条件(*)，并且 l^M 是綫性的．为了在 l^M 中存在一个齐性範数，使这範数与 ρ-收歛等价(这乃是指：$\|x_n\|\to 0$ 蘊涵关系 $\rho_M(x_n)\to 0$，并且反面的蘊涵也成立)，必須且只須 M 等价于一个凸函数．

这条件的充分性实在在很久以前就已熟知了．如果 N 是連續的、偶的，对 $t\geqslant 0$ 是单調遞增的，并且满足条件 Δ，那末相应的空間 l^N 一定是綫性的，并且可以在它里面引入一个齐性範数．这由下面的考虑得出．如果 $M\sim N$，而 N 是凸的，l^M 是綫性的，那末 N 也必满足条件 Δ，而我們可以在 l^M 中使用与 l^N 中相同的範数．但对于一个满足条件 Δ 的連續偶凸函数 N，我們可以很簡单地定义齐性範数．我們考察使下列不等式成立的一切 $\varepsilon>0$：

$$\rho_N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)<1,\ x\in l^N, \tag{0}$$

并且令範数等于

$$\|x\|=\inf\varepsilon,$$

这里下端是按使不等式(0)成立的一切正数 ε 而取的：这是 l^N 中齐性範数的一种可能定义．按照另一种方式，我們可以藉所謂与 N 相补的函数 N' 引入齐性範数．关于引入範数的这个第二种方法，我曾最先在战前的著作里建議过．在种种应用中，这个方法执行很好的职责，例如在苏联这方面的著作中，完全只使用这第二个範数．但为了說明我們所論的那个定理，考虑上面引入的範数已經完全足够了．所以我再重复一下：定理 5 中条件的充分性并不是新的．新的地方只在于下列知識，即給出的凸性条件也是必要的．

現在我还要很簡短地論述一下如何把到此为止的考察轉移到空間 L^N 上去．我将尽量最簡短地敍述一下．我們用 L^M 表示在(0,1)上可测并使积分

$$\rho_M(x)=\int_0^1 M(x(t))\,dt$$

有穷的一切函数的全体．关于函数 M，我們假定它是 Baire 函数．此外还需要使这函数遵守某些另外的条件．除掉已經知道的条件(*)之外，我們还需要下列条件：

(0)关系 $N(t_n)\to\infty$ 与关系 $|t_n|\to\infty$ 等价．

条件(0)就中保証 M 是局部有界的．首先我們象对于 l^M 那样，引入两函数 M 与 N 等价的概念．为簡单起見，我們假定 M 与 N 具有属性(0)．于是可以按較簡化的形式定义等价性概念，也就是按照如下方式定义：

两个函数 M,N 叫做等价的(用符号表示成 $M\sim N$)，是指存在正的常数 A,B,r，使当 $|t|\geqslant r$ 时，$N(t)\leqslant BM(t)$，$M(t)\leqslant AN(t)$．

为了 $L^M=L^N$，必須且只須 $M\sim N$．

下列基本命題成立：在假定 M 满足条件(*)与(0)的假定下，并設 L^M 是綫性的，必然可以在 L^M 中引入一个 F-範数，使

1) 由 $\|x_n\|\to 0$，可得关系 $\rho_M(x_n)\to 0$，并且反过来也成立．

2) 完备性公理满足，这乃是說，我們常可以把綫性空間 L^M 看作是 Fréchet 空間．

在关于 M 的同上假定下，可以主张如下：

为了在 L^M 中存在一个齐性範数，具有属性 1)，必須且只須 M 等价于一个連續凸函

数 N.

关于在函数空間 L^M 中引入 B-範数还要說几句話. 假定 M 連續、凸、对于 $t \neq 0$ 滿足 $M(t) > 0$，并且 M 是对称的. 此外假定对于大的 t 有 Δ-条件成立，就是說，

$$\text{当 } |t| > r \text{ 时}, \quad M(2t) \leqslant AM(t).$$

Δ-条件保証了空間 L^M 的綫性. 为了引入範数，可以使用与在数列空間情形相同的方法，也就是考察不等式

$$\rho_M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leqslant 1, \tag{*}$$

并与以前完全一样，作下端 $\inf \varepsilon$，这是对满足不等式(*)的一切正数 ε 而取的. 这样定义的範数满足所要求的. 特别考察 $M(t) = |t|^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$ 情形. 用很平凡的計算可以証明

$$\inf \varepsilon = \| x \| = \left(\int_a^b |x(t)|^{\alpha} dt\right)^{1/\alpha},$$

从而就是平常的範数.

但除古典情形 $M(t) = |t|^{\alpha}$ 之外，自然也存在其它的冪性函数 $M(t)$，滿足要求的条件. 例如可以取

$$M(t) = |t|^{\alpha}(|\ln|t|| + 1) \quad \text{如果 } \alpha > 1.$$

但考察函数

$$M(t) - e^{t^2} - 1.$$

这函数是凸、連續、偶，但当然它不滿足条件 Δ_2. 事实上，容易証明，假定条件(Δ_2)就使得当 $|t| \to \infty$ 时，M 增加不比一冪函数快，也就是說，必然对于足够大的 $|t|$，有不等式

$$M(t) < C|t|^k$$

成立，如果当 $|t| \geqslant \delta$ 时，$M(2|t|) \leqslant kM(t)$　最后一例說明，如果想从函数 M 的增加方面的限制解脫出来，必須对空間 L^a 的定义作进一步的推广　事实上，这种推广已經知道了. 但由于时間限制，我将不去深入这类推广了.

第9卷 第2期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 2
1959 年 6 月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1959

方程組 $\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sum_{0\le i+k\le 2} a_{ik} x^i y^k \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{0\le i+k\le 2} b_{ik} x^i y^k\end{aligned}$ 的极限环綫的位置*

董 金 柱

(中国科学院数学研究所)

§1. 問　　題

方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sum_{0\le i+k\le 2} a_{ik} x^i y^k \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{0\le i+k\le 2} b_{ik} x^i y^k\end{aligned}\right\} \qquad (E_2)$$

的 Hilbert 問題包括两部分，卽問 (E_2) 在全平面上最多有几个极限环綫及它們的位置(它們如何分布).

在一篇独具风格的論文[1]中，Петровский 及 Ландис 用創見的方法以惊人的气魄处理了方程組 (E_2)，得到了 (E_2) 的极限环綫在全平面上最多有三个的結果.

本文是[2]的継續，目的是討論方程組 (E_2) 的极限环綫的位置，把它們的拓撲分布問題給以最后的解决.

我們現在的問題是：設方程組 (E_2) 有三个极限环綫，以 L_c^i $(i=1,2,3)$ 表之，以 I_i 表 L_c^i 之补集 $c(L_c^i)$ 之有界分量，問位置

$$I_i \cap I_j = 0, \qquad I_i \cap I_k \neq 0$$
$$(i \neq j \neq k = i, \quad i, j, k = 1, 2, 3)$$

是否存在.

我們的解决是：它是存在的.

§2. 解　　决

考慮方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \mathfrak{X}(x, y, \theta) = X(x, y)\cos\theta - Y(x, y)\sin\theta, \\ \frac{dy}{dt} &= \mathfrak{Y}(x, y, \theta) = X(x, y)\sin\theta + Y(x, y)\cos\theta,\end{aligned}\right\} \qquad (E_\theta)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}X(x, y) &= axy, \\ Y(x, y) &= b(x-1)(x-x_0) + cy^2 + dxy - dy.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

---

* 作者撰此文謹向 1958 年"十一"献禮.

我們証明，适当地选取 x_0, a, b, c, d, θ，則方程組 (E_θ) 有三个极限环綫，具 §1 中所述之位置。

現先給出下列

引理 1　方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X(x, y),\\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y),\end{aligned}\right\} \tag{E}$$

此地右側之 $X(x, y)$, $Y(x, y)$ 由(1)給出，其中参数 x_0, a, b, c, d 滿足下列条件

$$1^\circ.\quad x_0 < 0,$$
$$2^\circ.\quad ab < 0,$$
$$3^\circ.\quad d^2 - 4bc\,x_0 < 0,$$

則在有限平面上，(E) 有且仅有两个奇点，其指数均为 $+1$。

証：显然方程組以

$$(1, 0), \qquad (x_0, 0)$$

为奇点。由条件 3°，

$$cy^2 + dy + bx^0 \neq 0. \tag{2}$$

从而，除此二点以外，(E) 无其它奇点。由条件 1°，$x_0 < 0$，則按[3]中第 IV 章定理 V 可知，此二奇点的指数相同。

現作变换

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= x - 1,\\ y_1 &= y,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

則方程組 (E) 化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= ay_1 + ax_1y_1,\\ \frac{dy_1}{dt} &= b(1 - x_0)x_1 + bx_1^2 + dx_1y_1 + cy_1^2,\end{aligned}\right\} \tag{E}_{10}$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - \sigma_1\lambda + \Delta_1 = 0, \tag{4}$$

此地

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= 0,\\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix}0, & a\\ b(1 - x_0), & 0\end{vmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

現由条件 1° 及 2° 知 $\Delta > 0$，从而方程組 $(E)_{10}$ 以 $(x_1, y_1) = (0, 0)$ 为中心或焦点，卽其指数为 $+1$。引理 1 証毕。

引理 2　設 x_0, a, b, c, d 滿足引理 1 中之条件，此外还滿足

$$4^\circ.\quad d^2 - 4b(c - a) < 0,$$
$$5^\circ.\quad a \neq c \neq 0,$$

则存在 $\eta_1 > 0$，使当 $|\theta| < \eta_1$ 时，方程組 (E_θ) 在 *Poincaré* 球面赤道上恰有二奇点，且均为鞍点．又以此二鞍点为端点之赤道上的两大圆弧为軌綫．

証： 首先考虑方程組 (E)．这方程組在赤道上的奇点由

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

决定，此地

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= axy, \\ Y_2 &= bx^2 + dxy + cy^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

即奇点在 $x = ky$ 上，而 k 满足方程

$$bk^3 + dk^2 + (c - a)k = 0. \tag{7}$$

由条件 4°，方程(7)除 $k = 0$ 外，无其它实根．从而得知方程組 (E) 在赤道上仅有二奇点．

現方程組 (E_θ) 之在赤道上的奇点由

$$x\mathfrak{Y}_2 - y\mathfrak{X}_2 = 0$$

决定，此地

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}_2 &= X_2\cos\theta - Y_2\sin\theta = axy\cos\theta - (bx^2 + dxy + cy^2)\sin\theta, \\ \mathfrak{Y}_2 &= X_2\sin\theta + Y_2\cos\theta = axy\sin\theta + (bx^2 - dxy + cy^2)\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由是，奇点在 $x = ky$ 上，k 需满足方程式

$$f(\theta, k) = Ak^3 + Bk^2 + Ck + D = 0, \tag{9}$$

此地

$$\left.\begin{aligned} A &= b\cos\theta, \quad B = a\sin\theta + b\sin\theta + d\cos\theta, \\ C &= d\sin\theta + c\cos\theta - a\cos\theta, \quad D = c\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

現考察方程(9)之实根判定式

$$\mathfrak{D}(\theta) = 18ABCD - 4B^3D + B^2C^2 - 4AC^3 - 27A^2D^2.$$

当 $\theta = 0$ 时，方程(9)化为方程(7)，而方程(7)仅有一个实根，故知

$$\mathfrak{D}(0) < 0.$$

而 $\mathfrak{D}(\theta)$ 为 θ 之連續函数，故有 $\eta_1 > 0$，使当

$$|\theta| < \eta_1$$

时，有

$$\mathfrak{D}(\theta) < 0.$$

从而，对 $|\theta| < \eta_1$，方程(9)亦仅有一个实根．于是，方程組 (E_θ) 在赤道上仅有二奇点．

以 α 表方程(9)的唯一的实根． 注意当 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ 时，$A(\theta) = b\cos\theta \neq 0$，从而对 $|\theta| < \min\left(\frac{\pi}{2}, \eta_1\right)$，

$$\alpha \neq \infty. \tag{11}$$

研究赤道上的情况．

考察（参閱[4]之第 142 頁）方程

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

此地

$$P = X(x, y, z)\cos\theta - Y(x, y, z)\sin\theta,$$
$$Q = X(x, y, z)\sin\theta + Y(x, y, z)\cos\theta,$$

而

$$X(x, y, z) = axy,$$
$$Y(x, y, z) = b(x^2 - xz - x_0xz + x_0z^2) + cy^2 + dxy - dyz.$$

由(11)，$\alpha \neq \infty$，故为研究赤道上之奇点，可令 $y = 1$. 于是，方程(12)化为

$$-zQ(x, 1, z)dx + R(x, 1, z)dz = 0. \tag{13}$$

或引入参数 τ，

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= R(x, 1, z), \\ \frac{dz}{d\tau} &= zQ(x, 1, z), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

此地

$$\left.\begin{aligned} R = xQ(x, 1, z) - P(x, 1, z) &= c\sin\theta + a_1x + b_1z + A_1x^2 + \\ &+ B_1xz + C_1z^2 + H_1x^3 + I_1x^2z + (bx_0\cos\theta)xz^2, \\ zQ = a_2x + b_2z + A_2x^2 &+ B_2xz + C_2z^2 + H_2x^3 + I_2x^2z + \\ &+ (-b\cos\theta - bx_0\cos\theta)xz^2 + (bx_0\cos\theta)z^3. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

而其中

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= c\cos\theta - a\cos\theta - d\sin\theta, & a_2 &= 0; \\ b_1 &= d\sin\theta, & b_2 &= c\cos\theta; \\ A_1 &= (a + b)\sin\theta + d\cos\theta, & A_2 &= 0; \\ B_1 &= -d\cos\theta - b(1 + x_0)\sin\theta, & B_2 &= d\cos\theta + a\sin\theta; \\ C_1 &= x^0\sin\theta, & C_2 &= -d\cos\theta; \\ H_1 &= b\cos\theta, & H_2 &= 0; \\ I_1 &= -b(1 + x_0)\cos\theta, & I_2 &= b\cos\theta; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

现因方程 (E_0) 在赤道上之奇点在 $x = \alpha y$ 上，故化为方程組(14)之后，此奇点之坐标应为 $(x, z) = (\alpha, 0)$.

做变换

$$x_1 = x - \alpha, \qquad z_1 = z, \tag{17}$$

則方程組(14)化为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= R(x_1 + \alpha, 1, z_1), \\ \frac{dz_1}{d\tau} &= z_1Q(x_1 + \alpha, 1, z_1). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

此地由直接計算可知

$$R(x_1+\alpha,1,z_1)=(a_1-2A_1\alpha+3H_1\alpha^2)x_1+$$
$$+(b_1-B_1\alpha+I_1\alpha^2)z_1+(\text{二次以上之項}),$$
$$z_1Q(x_1+\alpha,1,z_1)=(a_2-2A_2\alpha+3H_2\alpha^2)x_1+$$
$$+(b_2-B_2\alpha+I_2\alpha^2)z_1+(\text{二次以上之項}),$$

其中之 $a_i, b_i, \cdots, H_i, I_i$ $(i=1,2)$. 由(16)給出.

作方程(18)之右方綫性項系数之行列式

$$P(\theta,\alpha)=\begin{vmatrix} a_1-2A_1\alpha+3H_1\alpha^2, & b_1-B_1\alpha+I_1\alpha^2 \\ a_2-2A_2\alpha+3H_2\alpha^2, & b_2-B_2\alpha+I_2\alpha^2 \end{vmatrix}=$$
$$=3(H_1I_2-I_1H_2)\alpha^4+(3B_1H_2-3H_1B_2+2I_1A_2-2I_2A_1)\alpha^3+$$
$$+(3H_1b_2-3H_2b_1+2A_1B_2-2A_2B_1+I_2a_1-I_1a_2)\alpha^2+$$
$$+(2A_2b_1-2A_1b_2+B_1a_2-B_2a_1)\alpha+a_1b_2-a_2b_1. \tag{19}$$

則由条件 5° 可知

$$P(0,0)=a_1(0)b_2(0)-a_2(0)b_1(0)=(c-a)c\neq 0. \tag{20}$$

現由(9)及(7)知

$$f(0,0)=0, \tag{21}$$

即 $f(\theta,k)=0$ 与方程 $P(\theta,k)=0$ 当 $\theta=0$ 时沒有公实根. 以 $S(\theta)$ 表此二代数方程之 *Sylvester* 行列式,則

$$S(0)\neq 0. \tag{22}$$

$S(\theta)$ 为一七行七列之行列式, 其元素为以 x_0, a, b, c, d 作系数的 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 的多項式, 因而对 θ 連續. 从而存在 $\eta_2>0$,使当 $|\theta|<\eta_2$ 时,

$$S(\theta)\neq 0. \tag{23}$$

这就是說, 当 $|\theta|<\eta_2$ 时, 方程(9)与方程 $P(\theta,k)=0$ 沒有公实根. 旣然 α 是方程(9)的唯一的实根,于是行列式(19), 即 $P(\alpha,\theta)\neq 0$, 当 $|\theta|<\min(\eta_1,\eta_2)=\eta_3$ 时. 从而可得 $(\alpha,0)$ 为方程組(14)之初等奇点.

由引理 1, 有限平面上有二奇点,指数均为 +1,現又知赤道上仅有二奇点,故在全部 Poincaré 球面上共有六个奇点. 按[3]之第 III 章之全球面上奇点指数的結果, 得知赤道上两奇点指数和应为 −2, 于是 $(\alpha,0)$ 之指数为 −1. 即为一鞍点. 又按方程組(14)可由 $z=0$ 所滿足,故知点 $(\alpha,0)$ 与其对頂点間赤道上两大圓弧均为軌綫. 引理 2 証毕.

現在証明

定理 設参数 x_0, a, b, c, d, θ 适合引理 1 及引理 2 的条件 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 此外,又滿足下列条件:

6°. $\left(\frac{b}{a}\right)^3(x_0-1)^2+c\neq 0,\quad d\neq 0.$

7°. 存在 $\eta_4>0$, 使当 $0<|\theta|<\eta_4$ 时,有

$$\mathfrak{X}(0,0,\theta)\cdot d>0$$
$$\sin\theta\cdot[a+b(x^0-1)]\cdot d<0.$$

則存在一个正数 η, 对滿足

$$|\theta|<\eta$$

的 θ，方程組 (E_θ) 有三个极限环，具 § 1 所要求的位置．

証：因方程 (E_θ) 系由方程組 (E) 之方向場旋轉一角度 θ 所得之方向場所定义的方程，故知方程 (E_θ) 与 (E) 的奇点与奇点指数均一致．于是由引理 1，方程組 (E_θ) 之有限平面上之奇点为

$$(1,0),\quad (x_0,0)$$

其指数均为 $+1$．

現为敍述确定起見，不妨設 $a>0$，因否則以 $\tau=-t$，則化为如此的情形．于是由引理 1 之条件 2°，$b<0$．

按定理之条件 6° 及引理 1 引理 2 之五項条件，可得知 $(1,0)$ 不为方程組 (E) 之中心[5]．于是 $(1,0)$ 必为一弱焦点，不妨假設其焦点量[6]为正．［焦点量为負的情形可以完全作类似的討論．］从而存在围繞 $(1,0)$ 之閉曲綫 $f_1(x,y)=\varepsilon$，使

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}X(x,y)+\frac{\partial f_1}{\partial y}Y(x,y)\right)\bigg|_{f=\varepsilon}>0, \tag{24}$$

即 $f_1(x,y)=\varepsilon$ 为一无切环．現 $f_1(x,y)=\varepsilon$ 为閉集，故

$$\min\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}X+\frac{\partial f_1}{\partial y}Y\right)\bigg|_{f_1=\varepsilon}=m>0. \tag{25}$$

从而当 $|\theta|<\eta_5$，$\eta_5=\left|\dfrac{\pi}{2}-\cos^{-1}m\right|$ 时，有

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\mathfrak{X}(x,y,\theta)+\frac{\partial f_1}{\partial y}\mathfrak{Y}(x,y,\theta)\right)\bigg|_{f_1=\varepsilon}>0, \tag{26}$$

其中 $\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$ 为方程組 (E_θ) 右方之函数．这就是說，$f_1=\varepsilon$ 亦为方程組 (E_θ) 之无切环．

研究奇点 $(1,0)$，作变换

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x-1,\\ y_1&=y.\end{aligned}\right\}$$

則方程組 (E_θ) 变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=[b(x_0-1)\sin\theta]x+[a\cos\theta]y+(x,y\text{ 的二次項}),\\ \frac{dy_1}{dt}&=[-b(x_0-1)\cos\theta]x+[a\sin\theta]y+(x,y\text{ 的二次項}).\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

由直接計算，可知当 $-\eta_6=\max\left(\dfrac{-\pi}{4},-\eta_3,-\eta_4,-\eta_5\right)<\theta<0$ 时，由 $b<0$ 之假定可得

$$\mathfrak{X}(0,0,\theta)=-bx_0\sin\theta>0, \tag{28}$$

从而由条件 7° 之前一不等式，有

$$d>0. \tag{29}$$

而从后一不等式，有

$$\sigma=\sin\theta\cdot[a+b(x_0-1)]<0,$$

从而方程組(27)以 $(x_1,y_1)=(0,0)$，亦即方程組 (E_θ) 以 $(1,0)$ 为稳定焦点．

由这个結果和前面的(26)，按 Poincaré-Bendixson 定理，可知在 $f_1=\varepsilon$ 的补集的有界分量內，方程組 (E_θ) 有一个极限环綫，当 $|\theta|<\eta_6$ 时．現以 L_θ^1 表此极限环綫．

现又由直接計算可知，对方程組 (E_θ)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 常数 \neq \infty. \tag{30}$$

故 $x=0$ 为方程組 (E_θ) 之无切弧. 按(28)，以 $x=0$ 上任一点为初始值出发之軌綫，当 t 增加时，进入右半平面. 从引理 2，当 $|\theta|<\eta_6$ 时，赤道上之奇点 S 为鞍点，故此等軌綫中至少有一条，設为 γ，不能以 S 为 Ω 极限集. 又 L_c^1 为不稳定之极限环綫，且右半平面上除 I_1 内有一奇点 $(1,0)$ 之外，沒有其它的奇点，于是 γ 必以一稳定极限环綫为其 Ω 极限集. 以 L_c^2 表此稳定极限环綫.

同理，有从 $x=0$ 上出发之軌綫 γ 当 t 減小时进入左半平面之后不能以 S 之对頂点 S' 为 α 极限集. 現說明，γ 亦不能以 $(x_0,0)$ 为 α 极限集.

做变換

$$x_1 = x - x_0,$$
$$y_1 = y,$$

则方程組 (E_θ) 化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= [-b(x_0-1)\sin\theta]x_1 + [ax_0\cos\theta - (dx_0-d)\sin\theta]y_1 + \\ &\quad + (x, y \text{ 的二次项}),\\ \frac{dy_1}{dt} &= b(x_0-1)\cos\theta + [ax_0\sin\theta + (dx_0-d)\cos\theta]y + \\ &\quad + (x, y \text{ 的二次项}),\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

则其特征方程一次項之系数为

$$\sigma(\theta) = -b(x_0-1)\sin\theta + ax_0\sin\theta + d(x_0-1)\cos\theta,$$

故

$$\sigma(0) = d(x_0-1).$$

于是按 $x_0<0$ 及(29)，$\sigma(0)<0$. 現 $\sigma(\theta)$ 为 θ 之連續函数于是有 $\eta_7>0$，当 $|\theta|<\eta_7$ 时，$\sigma(\theta)<0$. 即方程組(31)以 $(x_1, y_1)=(0,0)$，亦即方程組 (E_θ) 以 $(x,y)=(x_0,0)$ 为稳定焦点或結点. 从而 γ 不以 $(x_0,0)$ 为 α 极限点.

于是，当 $0<|\theta|<\eta=\min\left(\frac{\pi}{4},\eta_6,\eta_7\right)$ 时，γ 之 α 极限集必为一不稳定极限环綫，設以 L_c^3 表之.

由以上所述显然

$$I_1\cap I_2\neq 0, \qquad I_1\cap I_3 = 0.$$

又以上的敍述中，每当得到 $L_c^i\ (i=1,2,3)$ 的存在的結論时，唯一性必然是滿足的，因为否则方程 (E_θ) 的极限环綫数目将超过 3，与 Петровский 及 Ландис 的結果将不一致. 定理証毕.

注意 在定理的証明及結論中，我們仅限于 θ 之值甚小时的情形. 事实上定理的結論不必一定要求 η 甚小，因为方程組 (E_θ) 一但对 $\theta=\theta_0$ 有单重极限环綫存在，则对 $|\theta-\theta_0|<$ 某定数之 θ，此等极限环綫仍不消失[7].

下面給出一个具体的方程作为定理的例子.

方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=[xy]\cos\theta-\left[-\frac{1}{3}(x-1)(x+2)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{3}y\right]\sin\theta\\ \frac{dy}{dt}&=\left[-\frac{1}{3}(x-1)(x+2)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{3}y\right]\cos\theta+[xy]\sin\theta\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

在有限平面上有二奇点，(1, 0) 及 (−2, 0)．当 $-\eta<\theta<0$ 时围繞 (1, 0) 有两个极限环綫，而围繞 (−2, 0) 有一个极限环綫，此地 η 为某定数．

以方程組(32)与 (E_θ) 比較知

$$x_0=-2,\quad a=1,\quad b=-\frac{1}{3},\quad c=\frac{1}{2},\quad d=\frac{1}{3},\quad \theta<0,$$

显然定理中之七項条件均可以滿足，故以上之断言成立．

定理証明中出現之无切环 $f_1(x, y)=\varepsilon$，是可以具体算出的，对方程組(32)，可取

$$f_1=f_2+f_3+f_4,$$

其中

$$f_2=x^2+y^2,$$

$$f_3=-\frac{10}{9}x^3-xy^2+\frac{2}{9}y^3,$$

$$f_4=x^4-\frac{1}{54}x^3y+\frac{2}{3}x^2y^2-\frac{17}{54}xy^3-\frac{1}{9}y^4.$$

直接計算給出

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}X(x,y)+\frac{\partial f_1}{\partial y}Y(x,y)=\frac{1}{54}(x^4+y^4)+G_5(x,y),$$

此地

$$X=xy,$$

$$Y=\frac{-1}{3}(x-1)(x+2)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{3}y.$$

$G_5(x, y)$ 为 x, y 的五次以上之項．按 [2] 中对函数 (2.1) 之处理所用之方法可以具体定出 ε 的数值，使

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\mathfrak{Y}\right)_{f_1=\varepsilon}>0,$$

其中 $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ 为方程組(32)之右方的函数．

对(32)具体算出一个定数 η 并不困难，但十分煩复．而且由于以上之定理后面的“注意”中所談的情況，我們不能算出最好的 η 来，所以便不在此計算了．

§ 3. 关于一个位置的补充

在[2]中，我們举出了方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{2}(\cos 10^{-22} + \sin 10^{-22}) - \left(\frac{1}{4}\cos 10^{-22} + \frac{1}{2}\sin 10^{-22}\right)x^2 + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\cos 10^{-22} + 2\sin 10^{-22}\right)xy + \left(\frac{1}{4}\cos 10^{-22} - \sin 10^{-22}\right)y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2}(\cos 10^{-22} - \sin 10^{-22}) + \left(\frac{1}{2}\cos 10^{-22} - \frac{1}{4}\sin 10^{-22}\right)x^2 + \\ &\quad + \left(-2\cos 10^{-22} + \frac{1}{2}\sin 10^{-22}\right)xy + \left(\cos 10^{-22} + \frac{1}{4}\sin 10^{-22}\right)y^2,\end{aligned}\right\} \quad [E_{2c}]$$

来說明，形如 (E_2) 之方程可以有两个极限环 L_c^1，L_c^2，其位置如

$$I_1 \cap I_2 = 0.$$

这个方程組 $[E_{2c}]$ 有一个特殊性質，即其方向場是以原点为对称的.

現問，如果形如 (E_2) 的方程不具有这个特殊性質，是否仍可以有两个极限环具如此之位置？

对此，我們的回答是肯定的.

事实上，与 § 2 中之討論类似，而且更較簡单些，可以証明下列的

定理 方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \mathfrak{X}(x, y, \theta) = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ \frac{dy}{dt} &= \mathfrak{Y}(x, y, \theta) = X\sin\theta + Y\cos\theta\end{aligned}\right\} \quad (E'_{2c})$$

其中

$$\left.\begin{aligned}X &= axy \\ Y &= b(x-1)(x-x_0) + cy^2 + dxy + ey\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

而且参数 $x_0, a, b, c, d, e, \theta$，滿足下列条件

1°. $x_0 < 0$

2°. $ab < 0$

3°. $e^2 - 4bcx_0 < 0$

4°. $d^2 - 4b(c-a) < 0$

5°. $a \neq c \neq 0$

6°. $(d+e)(dx_0+e) < 0.$

7°. $\operatorname{sign}\theta = \operatorname{sign}(bd + be)$

則存在一定数 $\eta > 0$，使当

$$|\theta| < \eta,$$

时，方程組 (E'_{2c}) 有两个极限环綫 L_c^1，L_c^2，其位置如

$$I_1 \cap I_2 = 0. \quad (34)$$

証 显然 § 2 中之两个引理仍然对方程 (E_{2c}) 可以应用.（因 $d = -e$ 与否并不影响 § 2 中之引理的証明.）

現为确定起見，与 § 2 之定理証明类似，可以設 $a > 0$，于是 $b < 0$.

按条件 7°，则可得

$$\operatorname{sign}\theta = -\operatorname{sign}(d+e). \tag{35}$$

直接計算可得，对方程組 (E_{2c})

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \text{常数} \neq \infty. \tag{36}$$

$$\operatorname{sign}\left.\left(\frac{dx}{dt}\right)\right|_{x=0} = -\operatorname{sign}\theta. \tag{37}$$

于是（由(35)及(37)）

$$\operatorname{sign}\left.\left(\frac{dx}{dt}\right)\right|_{x=0} = \operatorname{sign}(d+e). \tag{38}$$

做变换

$$\begin{cases} x_1 = x - 1 \\ y_1 = y. \end{cases}$$

则方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

变为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ay_1 + ax_1y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= b(1 - x^0)x_1 + (d+e)y_1 + bx_1^2 + dx_1y_1 + cy_1^2 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

于是可知方程組(39)的奇点 $(x, y) = (1, 0)$ 是否为稳定視 $\operatorname{sign}(d+e)$ 是否为負而决定.

完全类似，可証得方程組(39)的奇点 $(x_0, 0)$ 是否稳定視 $\operatorname{sign}(dx_0 + e)$ 是否为負而决定.

現对方程組 (E'_{2c})，决定奇点 $(1, 0)$，$(x_0, 1)$ 是否稳定的量是 θ 的連續函数，設分別以 $\sigma_1(\theta)$ 及 $\sigma_2(\theta)$ 表之，则有

$$\sigma_1(0) = d + e$$
$$\sigma_2(0) = dx_0 + e$$

而 $d + e \neq 0$，$dx_0 + e \neq 0$，故存在 $\eta > 0$，使当 $|\theta| < \eta$ 时，

$$\sigma_1(\theta) \neq 0, \quad \sigma_2(\theta) \neq 0. \tag{41}$$

即

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sign}\sigma_1(\theta) &= \operatorname{sign}(d+e) \\ \operatorname{sign}\sigma_2(0) &= \operatorname{sign}(dx_0+e) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

则按条件 6°，当 $|\theta| < \eta$ 时，

$$\sigma_1(\theta)\cdot\sigma_2(\theta) < 0. \tag{43}$$

現按(36)，$x = 0$ 为方程組 (E'_{2c}) 的无切弧，又依 § 2 之引理 2，赤道上仅有两个奇点

且均为鞍点，故从 $x=0$ 上出发之軌綫中至少有一条，設以 γ 表之，当 t 依 $-\operatorname{sign}\theta$ 方向延續而进入右半平面之后，不能以赤道上之奇点为极限点．赤道为軌，故 γ 亦不能穿过而进入另一半球．又按(38)及(42)，γ 亦不能以奇点 $(1,0)$ 为极限点．从而在右半平面上，必有一极限环綫存在，以 L_c^1 表之．

同样道理，有軌綫 γ 从 $x=0$ 上出发，当 t 依 $\operatorname{sign}\theta$ 之方向延續时，按(43)，不能以 $(x_0,0)$ 为极限点，于是 γ 以一极限环綫 L_c^2 为极限集．L_c^2 在左半平面內，故(34)成立．

由(38)，(42)，(43)，方程組 (E'_{2c}) 在左右两半平面各有奇数个极限环綫．从而方程組 (E'_{2c}) 仅有此二极限环綫，因否則极限环綫数目将多于 3 个，这不可能．定理証毕．

作为这个定理的具体例子，仅把方程組(32)中的右端略加修改即可．例如，方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=xy\cos\theta-\left[-\frac{1}{3}(x-1)(x+2)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{3}y\right]\sin\theta,\\ \frac{dy}{dt}&=\left[-\frac{1}{3}(x-1)(x+2)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{3}y\right]\cos\theta+xy\sin\theta.\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

在 $10^{-100}<\theta<0$ 时，围繞奇点 $(1,0)$ 及 $(-2,0)$ 各有一个唯一的极限环綫．

§4. 一 点 註 記

設 §1 中方程組 (E_2) 有两个指数为 $+1$ 的奇点为 (α_j,β_j)，$j=1,2$．則作变换

$$\begin{aligned}x_j&=x-\alpha_j,\\ y_j&=y-\beta_j,\end{aligned}\qquad(j=1,2)$$

后，方程組 (E_2) 化为如下形式

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_j}{dt}&=\sum_{1\le i+k\le 2}a^j_{ik}x^iy^k,\\ \frac{dy_j}{dt}&=\sum_{1\le i+k\le 2}b^j_{ik}x^iy^k,\end{aligned}\quad(j=1,2)\right\}\tag{E'_2}$$

其中

$$\triangle_j=\begin{vmatrix}a^j_{10}&a^j_{01}\\ b^j_{10}&b^j_{01}\end{vmatrix}>0.\qquad(j=1,2)$$

现若 $\sigma_j=a^j_{10}+b^j_{01}=0$，則称奇点 (α_j,β_j) 为临界中心．显然临界中心或为中心或为弱焦点．

我們可以証明：若方程組有两个奇点均为临界中心，則在此二奇点附近不存在三个极限环綫且有 §1 中所述之位置．

事实上，我們有下列的

定理：設方程組 (E_2) 有两个不同的奇点 (α_j,β_j)，$j=1,2$ 均为临界中心．則存在一个正数 η，及正数 δ，使对所有的以 (α_j,β_j)，$j=1,2$ 为奇点的形如

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\sum_{0\le i+k\le 2}(a_{ik}+\lambda_{ik})x^iy^k\\ \frac{dy}{dt}&=\sum_{0\le i+k\le 2}(b_{ik}+\mu_{ik})x^iy^k\end{aligned}\right\}\tag{E'_2}$$

的方程組，当

$$|\lambda_{ik}| < \eta, \quad |\mu_{ik}| < \eta \quad (0 \leqslant i + k \leqslant 2)$$

时，在 (α_j, β_j)，$j = 1, 2$，的 δ 邻近不出現三个极限环綫具 §1 中所述之位置.

証：不失一般性，可假定方程組 (E_2') 之二不同之奇点为 $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha, \beta)$ 而 $(\alpha_2, \beta_2) = (0, 0)$.

因 $(0, 0)$ 为临界中心，故方程組 (E_2')，$j = 2$，可經一个 (x, y) 的非奇异綫性变換化为下形

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + \lambda_1 x - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2 = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2 = Q(x, y) \end{aligned}\right\} \quad (E_2'')$$

現又作綫性变換

$$x_1 = x - \alpha$$

$$y_1 = y - \beta$$

则經計算，可知方程組 (E_2'') 又可化为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= [\lambda_1 - 2\lambda_3\alpha + (2\lambda_2 + \lambda_5)\beta]x_1 + [-1 + \alpha(2\lambda_2 + \lambda_5) + 2\beta\lambda_6]y_1 + R_1(x_1, y_1) \\ \frac{dy_1}{dt} &= [1 + 2\lambda_2\alpha + (2\lambda_3 + \lambda_4)\beta]x_1 + [\lambda_1 + (2\lambda_3 + \lambda_4)\alpha - 2\beta\lambda_2]y_1 + R_2(x_1, y_1) \end{aligned}\right\} \quad (E_2''')$$

其中右方之 R_1 及 R_2 为 x_1, y_1 的二次齐次多項式.

現設定理不成立，则对任何正数 η，有 λ_{ik}, μ_{ik}，$0 \leqslant i + k \leqslant 2$，使方程組 (E_2') 有三个极限环綫，其位置或为奇点 $(0, 0)$ 附近出現两个，而奇点 (α, β) 附近出現一个；或为奇点 $(0,0)$ 附近出現一个，而 (α,β) 附近出現两个．按 Баутин ([8] § 1 中)之定义，这就是說，方程組 (E_2'') 做为其右側多項式之系数空間 E_1^{10} 之一点，(E_2'') 对 E_1^{10} 之环量 Ц (Цикличность) 为 2，而 (E_2''') 对其右側多項式之系数空間 E_2^{10} 之环量 $Ц = 1$；或者 (E_2'') 对 E_1^{10} 之环量 $Ц = 1$，而 (E_2''') 对 E_2^{10} 之环量 $Ц = 2$. 不失一般性，仅需討論前者之情形即可.

現設 (E_2'') 对空間 E_1^{10} 之环量 $Ц = 2$．则依[8]之結果，必有

$$\lambda_1 = \lambda_5 = 0; \quad \lambda_2 \neq 0; \quad \lambda_4 \neq 0. \tag{45}$$

現若 (E_2''') 对 E_2^{10} 之 $Ц > 0$，则必有

$$\sigma = 2\lambda_1 + \lambda_4\alpha + \lambda_5\beta = 0,$$

此地 σ 为 (E_2''') 之特征方程中一次項的系数．于是按(45)，$\sigma = \lambda_4\alpha = 0$，即 $\alpha = 0$．又方程組 (E_2'') 以 (α, β) 为奇点，現 $\alpha = 0$，则有

$$Q(0, \beta) = -\lambda_2\beta^2 = 0.$$

从而 $\lambda_2 = 0$ 或 $\beta = 0$．又按(45)，则必为 $\beta = 0$．即二奇点 (α, β)，$(0, 0)$ 重合，这与定理的假定矛盾．定理証毕.

参　考　文　献

[1] Петровский и Ландис, О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — многочлены 2-й степени, *Матем. сб.*, т. 37 (79), 2 (1955).

[2] 董金柱，方程式组 $\frac{dx}{dt} = \sum_{0<i+k<2} a_{ik} x^i y^k$, $\frac{dy}{dt} = \sum_{0<i+k<2} b_{ik} x^i y^k$ 的奇点指数分布与其极限环线的位置，数学学报，第8卷，第2期(1958)，258—268.
[3] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle, Oeuvres de H. Poincaré, Tome I.
[4] S. Lefschetz, Lectures on differential equations, Princeton, 1946.
[5] Сахарников, Н. А., Об условиях Фроммера существования центра, Прикладная математика и механика, вып. 5, 1946.
[6] M. Frommer, Über das Auftreten der Wirbeln und Strudeln in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, *Math. Annalen*, т. 109 (1934).
[7] G.F.D. Duff, Limit-cycles and rotated vector fields, *Annals of Math.*, Vol. 57, № 1, January (1953), 15—31.
[8] Баутин, Н. Н., О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра, *Матем. Сборник*, Том 30, 1952, 181—196.

ПОЛОЖЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{0\leq i+k\leq 2} a_{ik} x^i y^k \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{0\leq i+k\leq 2} b_{ik} x^i y^k \end{aligned}\right\} \quad (E_2)$$

Тунг Чин-чу

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

Резюме

Эта статья является продоложением [2].

Обозначим i-ый предельный цикл системы (E_2) через L_i, и ограниченный компонент из комплиментов L_i через I_i $(i = 1, 2, 3)$. Для относительного положения

$$I_1 \cap I_2 \neq 0; \quad I_1 \cap I_3 = 0, \qquad (P)$$

мы докажем следующую

Теорему Пусть шесть параметеров a, b, c, d, x_0, θ в правой части уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= axy\cos\theta - [b(x-1)(x-x_0) + cy^2 + dxy - dy]\sin\theta, \\ \frac{dy}{dt} &= axy\sin\theta + [b(x-1)(x-x_0) + cy^2 + dxy - dy]\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (E_2^\theta)$$

Выполняют

1°. $x^0 < 0$;
2°. $ab < 0$;
3°. $d^2 - 4bcx_0 < 0$;
4°. $d^2 - 4b(c-a) < 0$;
5°. $a \neq c \neq 0$;
6°. $\left(\frac{b}{a}\right)^3 (x_0 - 1)^2 + c \neq 0, \quad d \neq 0$;
7°. $\theta bd > 0$;
8°. $\theta[a + b(x^0 - 1)] \cdot d < 0$;

то существуют постоянная $\eta>0$ так, что для $|\theta|<\eta$ (E_θ) имеет три предельных цикла, которые имеют положение (P).

Таким образом, все осуществляемые положения являются расмотренными.

Кроме этого, в этой статьи мы укажем: Для системы, имеющей два предельных цикла, условия симметричности векторного поля системы, как в системе (E_{2c}) в [2], не нужно для осуществления положения

$$I_1 \cap I_2 = 0.$$

Наконец, для положения (P), статья и установит

Теорему Пусть (E_2) имеет две различные особые точки (α_i, β_i), $i = 1, 2$, которые являются критическими центрами, то существуют постоянные $\eta > 0$ и $\delta > 0$ так, что для всех систем вида

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{0 \le i+k \le 2} (a_{ik} + \lambda_{ik}) x^i y^k,$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{0 \le i+k \le 2} (b_{ik} + \mu_{ik}) x^i y^k,$$

где $|\lambda_{ik}| < \eta$ и $|\mu_{ik}| < \eta$ выполняют условия, что (α_i, β_i), $i = 1, 2$, остаётся особыми точками, положения не осуществляется в δ-окрестности этих точек.

第9卷 第2期 数学学报 Vol. 9, No. 2
1959年6月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1959

陣的模数最大的特征根的幅角

耿 济
(交通大学)

設有元素为实数或复数的方陣 $A = \| a_{ij} \|_1^n$，多項式 $|A - \lambda E|$ 叫做 A 的特征多項式，这里 E 为么陣，λ 为未知量，这个多項式的根叫做 A 的特征根.

現在采用下面的一些記号.

我們用 A^* 表 A 的共軛轉置陣；对于任意正整数 K，令 $A^k = \| a_{ij}^{(k)} \|_1^n$，并令

$$\frac{A^k + A^{k*}}{2} = \| b_{ij}^{(k)} \|_1^n, \quad \frac{A^k - A^{k*}}{2i} = \| c_{ij}^{(k)} \|_1^n,$$

以及

$$a_k = \sum_{i,j} |a_{ij}^{(k)}|^2, \quad b_k = \sum_{i,j} |b_{ij}^{(k)}|^2, \quad c_k = \sum_{i,j} |c_{ij}^{(k)}|^2.$$

Farnell[1] 和 Gautschi[2] 曾証明：若 ω 为陣 A 的具有最大模数的特征根，则 ω 的模数为数列 $\{a_k^{1/2k}\}$ 的极限，即

$$|\omega| = \lim_{k\to\infty} a_k^{1/2k}. \tag{1}$$

关于某些特别陣，ω 的幅角是可以确定的；例如 Perros 曾指出：若 $A = \| a_{ij} \|_1^n$ 为正陣（即 $a_{ij} \geqq 0$），则 ω 为一正实数，即 $\arg \omega = 0$[3].

本文的目的在于对于任意陣 A 来討論 ω 的幅角問題．我們有下面的定理.

定理 設 ω 为陣 A 的模数最大的特征根，则 ω 的幅角 $\arg \omega$ 必为 $\pm\psi, \pi \pm \psi$ 的形式之一，这里

$$\psi = \lim_{k\to\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{|(b_{k+1}c_k)^{1/2} - (b_k c_{k+1})^{1/2}|}{(b_{k+1}b_k)^{1/2} + (c_{k+1}c_k)^{1/2}}$$

在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 之上．其中 $u_k = \dfrac{|(b_{k+1}c_k)^{1/2} - (b_k c_{k+1})^{1/2}|}{(b_{k+1}b_k)^{1/2} + (c_{k+1}c_k)^{1/2}}$ 或 $\dfrac{(b_{k+1}c_k)^{1/2} + (b_k c_{k+1})^{1/2}}{|(b_{k+1}b_k)^{1/2} - (c_{k+1}c_k)^{1/2}|}$.

証明 首先，設 $\lambda_l = \rho_l e^{i\theta_l}$ $(l = 1, 2, \cdots, n)$ 为陣 A 的特征根，则对于任一个 A^k 必存在一个么性陣 U，使得

$$U^* A^k U = T, \tag{2}$$

这里

$$T = \begin{Vmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \cdots & \lambda_n^k \end{Vmatrix}$$

于是

$$U^* A^{k*} U = T^*, \tag{3}$$

并且

$$U^*\left(\frac{A^k + A^{k*}}{2}\right)U = \frac{T + T^*}{2},$$

$$U^*\left(\frac{A^k - A^{k*}}{2i}\right)U = \frac{T - T^*}{2i}.$$

因此[4]

$$\sum_l \rho_l^{2k}\cos^2 k\theta_l + 2\sum_{1<j<i<n}\left|\frac{t_{ij}}{2}\right|^2 = b_k, \tag{4}$$

$$\sum_l \rho_l^{2k}\sin^2 k\theta_l + 2\sum_{1<j<i<n}\left|\frac{t_{ij}}{2}\right|^2 = c_k. \tag{5}$$

若設 $\omega = \rho e^{i\theta}$，則

$$\rho^{2k}\cos^2 k\theta \leqq b_k,$$
$$\rho^{2k}\sin^2 k\theta \leqq c_k.$$

这样就推得

$$|\omega| = \rho \leqq \min\left[\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k}, \left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k}\right]. \tag{6}$$

由于 $\rho^{2k} \leqq b_k + c_k = a_k$，故可作下面的規定：

$$\text{当}\ \cos k\theta = 0\ \text{时}, \left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k} = a_k^{1/2k},$$

$$\text{当}\ \sin k\theta = 0\ \text{时}, \left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k} = a_k^{1/2k}.$$

其次，証明不等式

$$\min\left[\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k}, \left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k}\right] \leqq a_k^{1/2k}, \tag{7}$$

其中等号成立的充要条件为

$$\mathrm{tg}^2 k\theta = \frac{c_k}{b_k}. \tag{8}$$

事实上，当 $\cos k\theta = 0$（或 $\sin k\theta = 0$）时，由于 $a_k = b_k + c_k$，得到

$$c_k^{1/2k} \leqq a_k^{1/2k}\ (\text{或}\ b_k^{1/2k} \leqq a_k^{1/2k})$$

故根据規定，显然(7)成立．又当 $\cos k\theta \neq 0$，$\sin k\theta \neq 0$ 时，假若(7)不成立，就会出現

$$\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k} > a_k^{1/2k},$$

$$\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k} > a_k^{1/2k},$$

由此导出 $b_k + c_k > a_k$ 的矛盾，故(7)成立．

次設

$$\min\left[\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k}, \left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k}\right] = \left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k}.$$

倘若(7)中等号成立，就有

$$\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k} = a_k^{1/2k}.$$

将 $b_k=a_k-c_k$ 代入，得出

$$\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k}=a_k^{1/2k};^{*)}$$

因此

$$\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k}=\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k},$$

所以(8)成立．反之，当(8)成立时，則有

$$\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}=\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}=a_k,$$

因而

$$\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k}=\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k}=a_k^{1/2k},$$

所以(7)中等号成立．

最后，对于充分大的 k 而言，由(6)、(7)与(1)推知

$$|\omega|\approx\min\left[\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k},\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k}\right]\approx a_k^{1/2k},$$

因而推知

$$\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k}\approx\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k}\approx a_k^{1/2k}.$$

故由(8)知道

$$\mathrm{tg}^2 k\theta\approx\frac{c_k}{b_k}.$$

令 $\mathrm{tg}\,k\psi\approx\left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}$ 或 $-\left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}$ 时，就有

$$\mathrm{tg}\,\psi=\mathrm{tg}[(k+1)\psi-k\psi]\approx\frac{\left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^{1/2}-\left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}}{1+\left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^{1/2}\left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}}\text{或}\frac{\left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^{1/2}+\left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}}{\left|1-\left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^{1/2}\left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}\right|}.$$

所以定理成立．

我們注意，定理还可以采用下面的几何方法来証明．

对于某一固定的正整数 k 而言，我們知道复平面上

圓 c_k:

$$\rho=a_k^{1/2k}$$

与

曲綫 Γ_k:

$$\rho=\min\left[\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\psi}\right)^{1/2k},\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\psi}\right)^{1/2k}\right]$$

$$(0\leqq\psi<2\pi)$$

---

*) 特别当 $\sin k\theta=0$ 时，是根据規定得出的；又当 $\cos k\theta=0$ 时，此处应有 $\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{1/2k}\geqq\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{1/2k}=a_k^{1/2k}$，即 $c_k^{1/2k}\geqq a_k^{1/2k}$，由于 $a_k=b_k+c_k$ 的关系，得到 $b_k=0$, $a_k^{1/2k}=c_k^{1/2k}$.

相交点的幅角 φ 必定满足

$$\operatorname{tg}^2 k\varphi = \frac{c_k}{b_k}$$

又知曲线 Γ_k 除了可能与圆 c_k 的相交点以外，其余所有的点都落在圆 c_k 的内部，但是 $\{c_k\} \to c$，而 c 是以原点为中心，以 $\{a_k^{1/2k}\}$ 的极限数 $|\omega|$ 为半径的圆，从(6)不难知道定理成立.

参　考　文　献

[1] Farnell, A. B. Limits for the field of values of a matrix, *Amer. Math. Monthly*, **52** (1945), 488—493.

[2] Weiner Gautschi, The asymptotic behaviour of powers of matrices, *Duke Math. J.* **20** (1953), 127—140.

[3] Wielandt, H., Unzerlegbare nicht negative matrizen, *Math. Zeitschrift*, **52** (1950), 642—648.

[4] Schur, I., Über die charakteristischen wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, *Math. Ann.* **66** (1909), 468—510.

THE ARGUMENT OF THE MAXIMUM ABSOLUTE VALUE OF CHARACTERISTIC ROOTS OF A MATRIX

G. Gun

(*Chiao-Tung University*)

ABSTRACT

Let $A = \|a_{ij}\|_1^n$ be an arbitrary square matrix, ω denotes the maximum absolute value of characteristic roots of the matrix A, and write

$$A^k = \|a_{ij}^{(k)}\|_1^n, \quad \frac{A^k + A^{k*}}{2} = \|b_{ij}^{(k)}\|_1^n, \quad \frac{A^k - A^{k*}}{2i} = \|c_{ij}^{(k)}\|_1^n,$$

$$a_k = \sum_{i,j} |a_{ij}^{(k)}|^2, \quad b_k = \sum_{i,j} |b_{ij}^{(k)}|^2, \quad c_k = \sum_{i,j} |c_{ij}^{(k)}|^2.$$
$$(k = 1, 2, 3, \cdots)$$

It was proved by Farnell and Gautschi that

$$|\omega| = \lim_{k\to\infty} a_k^{1/2k}.$$

In the present paper we proved that either

$$\arg \omega \equiv \phi \pmod{\pi},$$

or

$$\arg \omega \equiv -\phi \pmod{\pi},$$

where

$$\phi = \lim_{k\to\infty} \operatorname{arc\,tg} u_k,$$

$$u_k = \frac{|(b_{k+1}c_k)^{1/2} - (b_k c_{k+1})^{1/2}|}{(b_{k+1}b_k)^{1/2} + (c_{k+1}c_k)^{1/2}} \quad \text{or} \quad \frac{(b_{k+1}c_k)^{1/2} + (b_k c_{k+1})^{1/2}}{|(b_{k+1}b_k)^{1/2} - (c_{k+1}c_k)^{1/2}|},$$

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

第 9 卷 第 2 期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 2
1959 年 6 月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1959

陣的特征根的限界 (II)

耿 济

(交通大学)

本文是前文[16]的續作，这里引用的記号与以前是一致的，例如 $\lambda_l = \alpha_l + i\beta_l (1 \leqq l \leqq n)$ 为实或复陣 $A = \| a_{ij} \|_1^n$ 的特征根，A^* 是 A 的共軛轉置陣，

$$R_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \qquad T_i = \sum_{j=1}^n |a_{ji}|,$$

$$\overline{RT} = \max_i \{R_i T_i\}, \qquad \overline{R} = \max_i \{R_i\}, \qquad \overline{T} = \max_i \{T_i\},$$

$$RT = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n R_i T_i, \qquad R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n R_i, \qquad T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T_i,$$

$$\underline{R} = \min_i \{R_i\}, \qquad \underline{T} = \min_i \{T_i\}, \qquad a = \max_{i \neq j}\{|a_{ij}|\};$$

此外，还引用一些新的記号，

$$A^k = \| a_{ij}^{(k)} \|_1^n, \qquad \frac{A^k + A^{k*}}{2} = \| b_{ij}^{(k)} \|_1^n, \qquad \frac{A^k - A^{k*}}{2i} = \| c_{ij}^{(k)} \|_1^n,$$

$$a_k = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^{(k)}|^2, \qquad b_k = \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}^{(k)}|^2, \qquad c_k = \sum_{i,j=1}^n |c_{ij}^{(k)}|^2,$$

$$(K = 1, 2, 3, \cdots)$$

以及

$$e = \frac{1}{2n^2}\sum_{i,j=1}^n (|a_{ij}| - |a_{ji}|)^2.$$

陣的特征根的限界上，第三个重要的結果是 1909 年 Schur[17]得到的定理

$$\sum_{l=1}^n |\lambda_l|^2 \leqq a_1. \tag{23}$$

由此推知

$$|\lambda|^2 \leqq a_1. \tag{24}$$

这一推論在 Schur 的論文里沒有明确的敍述，直到 1944 年 Farnell[2] 运用其他的方法才指出(24)，这一結果有时确实比前文[16]改进的 Barankin 定理

$$|\lambda|^2 \leqq \overline{RT} - \max\left(\frac{\underline{R}}{\overline{R}} \cdot \frac{\overline{RT} - RT}{(\overline{R} - \underline{R} + a)^2} \cdot a^2,\ \frac{\underline{T}}{\overline{T}} \cdot \frac{\overline{RT} - RT}{(\overline{T} - \underline{T} + a)^2} \cdot a^2\right)$$

和改进的 Frobenius 定理

$$|\lambda| \leqq \min\left(\overline{R} - \frac{\overline{R} - R}{\overline{T} - T + a} \cdot a,\ \overline{T} - \frac{\overline{T} - T}{\overline{R} - \underline{R} + a} \cdot a\right)$$

等都来得更精确.

特別当陣 A 的元有很多是零时，在 1937 年 Ledermann[16] 設陣 A 中每列至少有 t 个零元，第 i 行的模方 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = h_i$，在 $\{h_i\}$ 中最小的 t 个之和为 h，就有

$$|\lambda|^2 \leqq a_1 - h.^{*)} \tag{25}$$

本文的目的是討論关于 Schur 定理推論的改进及其定理的推广等問題.

定理 9 (Schur 定理推論的改进).

$$|\lambda|^2 \leqq a_1 - \max\left(\frac{a^4 e}{(\bar{R} - \underline{R} + a)^4},\ \frac{a^4 e}{(\bar{T} - \underline{T} + a)^4}\right). \tag{26}$$

証明 設 ω 为正陣 $P = \|p_{ij}\|_1^n\ (p_{ij} = |a_{ij}|)$ 的最大特征根，对应于 ω、P 的特征向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 存在，且 $x_l > 0\ (1 \leqq l \leqq n)$ 使得[10],[14]

$$\omega x_i = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}x_j.$$

以 x_i 分别乘各項后，再对 i 求和，就有

$$\omega \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}x_ix_j.$$

从拉格朗日恆等式知道

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}x_ix_j\right)^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j,h,k=1}^{n}\begin{vmatrix} p_{ij} & p_{hk} \\ x_ix_j & x_hx_k \end{vmatrix}^2.$$

这样得到

$$\omega^2 = a_1 - \frac{1}{2}\sum_{i,j,h,k=1}^{n}\begin{vmatrix} p_{ij} & p_{hk} \\ x_ix_j & x_hx_k \end{vmatrix}^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-2} \leqq$$

$$\leqq a_1 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\begin{vmatrix} p_{ij} & p_{ji} \\ x_ix_j & x_jx_i \end{vmatrix}^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-2} \leqq$$

$$\leqq a_1 - \frac{1}{2n^2}\sum_{i,j=1}^{n}(p_{ij} - p_{ji})^2 \cdot \left[\frac{\min_i \{x_i\}}{\max_i \{x_i\}}\right]^4.$$

在前文[16]定理 1 中我們已經証得

$$\frac{\min_i \{x_i\}}{\max_i \{x_i\}} \geqq \frac{2a}{\sqrt{(\bar{R} - \underline{R})^2 + 4a^2} + \bar{R} - \underline{R}} \geqq \frac{a}{\bar{R} - \underline{R} + a}.$$

因此

$$|\lambda|^2 \leqq \omega^2 \leqq a_1 - \frac{a^4 e}{(\bar{R} - \underline{R} + a)^4}.$$

---

*) 这里 Ledermann 定理的敍述上和形式上与原文稍异.

以列代替行时，又有类似的結果，所以(26)成立。

［附註］ 現在給 Schur 定理的推論另一簡短的証明。

設 $\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \cdots \geqq \sigma_n$ 为 Hermite 陣 AA^* 的特征根，由根与系数的关系立刻知道

$$\sum_{l=1}^{n} \sigma_l = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{a}_{ij} \right) = a_1.$$

Browne[19] 早已指出

$$\sigma_1 \geqq |\lambda|^2 \geqq \sigma_n.$$

所以(24)显然成立。

定理 10 (Schur 定理的推广)

$$\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^{2k} = \max(b_k, c_k) + \rho(A, K)\min(b_k, c_k),\ 0-1 \leqq \rho(A, K) \leqq +1 \tag{27}$$

其中 (i) $\rho(A, K) = 1$ 的充要条件为 A^k 是模范陣(即 $A^k A^{k*} = A^{k*} A^k$); (ii) $\rho(A, K) = -1$ 的充要条件为 A^k 的特征根全为实根或者全为純虚根; (iii) $\rho(A, K) = c$，c 为 $[-1, 1]$ 中的任一实数的充要条件为 A^k 是 Hermite 陣或者反 Hermite 陣。

以上結果不仅对正整数 k 是成立的，对于負整数而言，只要 A 为满秩陣时定理仍然成立。

証明 設 $\lambda_l = \rho_l e^{i\theta_l}(1 \leqq l \leqq n)$ 为陣 A 的特征根，对于 A^k 必存在么性陣 U，使得

$$U^* A^k U = T, \tag{28}$$

这里

$$T = \left\| \begin{matrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \cdots & \lambda_n^k \end{matrix} \right\|$$

在(28)取共軛和轉置，就有

$$U^* A^{k*} U = T^*. \tag{29}$$

将(28)与(29)相加、相減分别除以 2、$2i$ 之后，更清楚地看出 $\frac{1}{2}(A^k + A^{k*})$ 与 $\frac{1}{2}(T + T^*)$，$\frac{1}{2i}(A^k - A^{k*})$ 与 $\frac{1}{2i}(T - T^*)$ 都是相似陣，因此

$$\sum_{l=1}^{n} \rho_l^{2k} \cos^2 k\theta_l + 2 \sum_{1<j<i<n} \left| \frac{t_{ij}}{2} \right|^2 = b_k, \tag{30}$$

$$\sum_{l=1}^{n} \rho_l^{2k} \sin^2 k\theta_l + 2 \sum_{1<j<i<n} \left| \frac{t_{ij}}{2} \right|^2 = c_k. \tag{31}$$

又将(30)与(31)相加、相減又有

$$\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^{2k} + \sum_{1<j<i<n} |t_{ij}|^2 = b_k + c_k, \tag{32}$$

$$\sum_{l=1}^{n} \rho_l^{2k} \cos 2k\theta_l = b_k - c_k. \tag{33}$$

这样立即从(32)与(33)得出

$$\max(b_k, c_k) - \min(b_k, c_k) \leqq \sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^{2k} \leqq b_k + c_k.$$

所以(27)成立.

最后只要討論 $\rho(A, 1) = 1, -1, c$ 的充要条件就够了.

(i) $\rho(A, 1) = 1$ 即 $\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^2 = b_1 + c_1 = a_1$ 时的充要条件为 A 是模范陣, 这就是 Toeplitz[20] 的結果.

(ii) $\rho(A, 1) = -1$ 即 $\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^2 = b_1 - c_1$ (或 $c_1 - b_1$) 时的充要条件为 A 的特征根全为实根(或全为純虛根).

事实上, 当 A 的特征根全为实根时, 从 (33) 知道 $\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^2 = b_1 - c_1$; 反之, 当 $\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^2 = b_1 - c_1$ 时又有

$$\sum_{l=1}^{n} \rho_l^2 \sin^2 \theta_l = \frac{1}{2}\left[\sum_{l=1}^{n} \rho_l^2 - \sum_{l=1}^{n} \rho_l^2 \cos 2\theta_l\right] = 0.$$

所以 A 的特征根全为实根.

相似地証得 $\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^2 = c_1 - b_1$ 的充要条件.

(iii) 至于 $\rho(A, 1) = c$ 时的結論是显然的.

由于 $a_k = b_k + c_k$, 从定理 10 得到下列推論

$$|\lambda| \leqq a_k^{\frac{1}{2k}}. \tag{34}$$

Farnell[21] 和 Gautschi[22] 曾指出当 k 趋大时, (34)的右边就趋于陣 A 特征根的模数最大者. (34)的几何意义就是說: 陣 A 的一切特征根都落在以原点为中心, 以 $a_k^{\frac{1}{2k}}$ 为半径的圓內或圓周之上, 現在还能找到一条閉曲綫比(34)的估計来得更精确.

定理 11　設閉曲綫 Γ_k

$$\sigma = \min\left[\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\varphi}\right)^{\frac{1}{2k}}, \left(\frac{c_k}{\sin^2 k\varphi}\right)^{\frac{1}{2k}}\right], \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \tag{35}$$

規定当 $\cos k\varphi = 0$ 时, $\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\varphi}\right)^{\frac{1}{2k}} = a_k^{\frac{1}{2k}}$,

当 $\sin k\varphi = 0$ 时, $\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\varphi}\right)^{\frac{1}{2k}} = a_k^{\frac{1}{2k}}$.

則陣 A 的一切特征根都落在 Γ_k 的內部或境界之上; 又当 $\{\Gamma_k\} \to \Gamma$ 时, Γ 上至少有陣 A 的一特征根(其余的都在 Γ 的內部或境界之上).

証明 設 $\lambda=\rho e^{i\theta}$ 为陣 A 的任一特征根，从(30)、(31)得到

$$\rho^{2k}\cos^2 k\theta \leqq b_k,$$
$$\rho^{2k}\sin^2 k\theta \leqq c_k.$$

相加后就有

$$\rho^{2k}\leqq b_k+c_k=a_k.$$

因此

$$\rho\leqq \min\left[\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\theta}\right)^{\frac{1}{2k}},\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\theta}\right)^{\frac{1}{2k}}\right].$$

所以陣 A 的一切特征根都在 Γ_k 的内部或境界之上，应用 Farnell 和 Gautschi 的定理不难知道 Γ 上至少有一特征根.

［附註］ 这一定理不仅比(34)精确，也很有用，作者在另一篇文章[23]里，虽然沒有明确的提出来，在某种意义上，可以說已应用这一結果討論了陣 A 模数最大的特征根的幅角問題.

又在定理 11 中，当 $k=1$ 时易知陣 A 的一切特征根都在矩形 $x=\pm b_1^{1/2}$, $y=\pm c_1^{1/2}$ 的内部或境界上，这个矩形的面积为 $4(b_1c_1)^{1/2}$. 现在討論另一有关的問題：設多边形 σ 的頂点依次为 $P_1(\alpha,\beta)$, $P_2(\alpha_2,\beta_2)$, $\cdots$, $P_n(\alpha_n,\beta_n)$（这里 $\alpha_l+i\beta_l$, $1\leqq l\leqq n$ 为陣 A 的特征根），不妨假設它的面积仍为 σ，对于 σ 的估值是会有助于我們了解特征根在复平面上分布的疏密情况，現在有下面的定理.

定理 12 我們有

$$|\sigma|\leqq (b_1c_1)^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

在(36)中等号成立的充要条件为 A 是 Hermite 陣或反 Hermite 陣.

証明 我們熟知的結果

$$\sigma=\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\ \beta_1&\beta_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_2&\alpha_3\\ \beta_2&\beta_3\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}\alpha_{n-1}&\alpha_n\\ \beta_{n-1}&\beta_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_n&\alpha_1\\ \beta_n&\beta_1\end{vmatrix}\right\}$$

展开后各項取絕对值，应用勾犀不等式就有

$$|\sigma|\leqq\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_l^2\sum_{l=1}^{n}\beta_l^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从(30)、(31)知道

$$\sum_{l=1}^{n}\alpha_l^2\leqq b_1,\quad \sum_{l=1}^{n}\beta_l^2\leqq c_1,$$

所以(36)成立.

此外，只要注意到勾犀不等式中等号成立的充要条件就能推出(36)中等号成立的充要条件来.

由于 $a_1=b_1+c_1$，因此又有

推論

$$|\sigma|<\frac{1}{2}a_1.$$

最后，作者能够整理出有关特征根上的一些文章，內容上虽然还很粗浅，但是，无論如何，不能不感謝黃綠芳先生在 1954—1955 年殷情的指导；不能不感謝楊武之先生，当时楊先生在严重的失去健康的日子里，还經常的关心和鼓励；也不能不感謝当时同組同志們的指教，在此謹向他們致謝.

参　考　文　献

[16] 耿济，陣的特征数的限界，数学进展，4 (1958)，450—456.
[17] Schur, I., Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, *Math. Ann.*, **66** (1909), 488—510.
[18] Walter Ledermann, On an upper limit for the latent roots of a certain class of matrices, *Journ. London Math Soc.*, **12** (1937), 12—18.
[19] Browne, E. T., The characteristic equation of a matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **34** (1928), 363—368.
[20] Otto Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér, *Math. Zeit.*, **2** (1918), 187—197.
[21] Farnell, A. B., Limits for the field of values of a matrix, *Amer. Math. Monthly*, **52** (1945), 488—493.
[22] Weiner Gautschi, The asymptotic behaviour of powers of matrices, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 127—140.
[23] 耿济，陣的模数最大的特征根的幅角，数学进展，9 (1959)，170—173.

LIMITS FOR THE CHARACTERISTIC ROOTS OF A MATRIX (II)

G. Gun

(*Chiao-Tung University*)

Abstract

This paper is a continuation of my paper[16].

Let $A = \|a_{ij}\|_1^n$ be a square matrix of order n and $\lambda_l = \alpha_l + i\beta_l$ $(l = 1, 2, \cdots, n)$ its characteristic roots. We define

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad T_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|,$$

$$\overline{RT} = \max_i \{R_iT_i\}, \quad RT = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_iT_i, \quad \underline{RT} = \min_i \{R_iT_i\},$$

$$\bar{R} = \max_i \{R_i\}, \quad R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i, \quad \underline{R} = \min_i \{R_i\},$$

$$\bar{T} = \max_i \{T_i\}, \quad T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i, \quad \underline{T} = \min_i \{T_i\},$$

$$a = \max_{i \neq i} \{|a_{ij}|\}, \quad e = \frac{1}{2n^2}\sum_{i,j=1}^{n} (|a_{ij}| - |a_{ji}|)^2,$$

and write

$$A^k = \|a_{ij}^{(k)}\|_1^n, \quad \frac{A^k + A^{k*}}{2} = \|b_{ij}^{(k)}\|_1^n, \quad \frac{A^k - A^{k*}}{2i} = \|c_{ij}^{(k)}\|_1^n,$$

$$a_k = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}^{(k)}|^2, \quad b_k = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}^{(k)}|^2, \quad c_k = \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}^{(k)}|^2,$$

where A^* is the conjugate of the transpose of A and k may assume any integral value.

I. Schur[17] proved the sharper result

$$\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^2 \leqq a_1,$$

so that

$$|\lambda|^2 \leqq a.$$

This is sometimes better than the following results[16]:

$$|\lambda|^2 \leqq \overline{RT} - \max\left[\frac{\underline{R}}{\overline{R}} \cdot \frac{\overline{RT} - RT}{(\overline{R} - \underline{R} + a)^2} a^2, \ \frac{\underline{T}}{\overline{T}} \frac{\overline{RT} - RT}{(\overline{T} - \underline{T} + a)^2} a^2\right],$$

and

$$|\lambda| \leqq \min\left[\overline{R} - \frac{\overline{R} - R}{\overline{T} - \underline{T} + a} a, \ \overline{T} - \frac{\overline{T} - T}{\overline{R} - \underline{R} + a} a\right].$$

We prove the following four theorems:

Theorem 9.

$$|\lambda|^2 \leqq a_1 - \max\left[\frac{a^2 e}{(\overline{R} - \underline{R} + a)^4}, \ \frac{a^2 e}{(\overline{T} - \underline{T} + a)^4}\right].$$

Theorem 10.

$$\sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|^{2k} = \max(b_k, c_k) + \rho(A, k)\min(b_k, c_k),$$

$$-1 \leqq \rho(A, k) \leqq 1.$$

(i) A^k is a normal matrix if and only if, $\rho(A, k) = 1$.

(ii) The characteristic roots are all real or all pure imaginary, if and only if $\rho(A, k) = -1$.

(iii) A^k is a Hermitan matrix or skew-Hermitan matrix, if and only if $\rho(A, k) = c$, where c is an arbitrary real number in $[-1, 1]$.

Theorem 11. Let Γ_k be a closed curve:

$$r = \min\left[\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\varphi}\right)^{\frac{1}{2k}}, \left(\frac{c_k}{\sin^2 k\varphi}\right)^{\frac{1}{2k}}\right], \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

and hence

$$\left(\frac{b_k}{\cos^2 k\varphi}\right)^{\frac{1}{2k}} = a_k^{\frac{1}{2k}}, \quad \text{when } \cos k\varphi = 0,$$

$$\left(\frac{c_k}{\sin^2 k\varphi}\right)^{\frac{1}{2k}} = a_k^{\frac{1}{2k}}, \quad \text{when } \sin k\varphi = 0.$$

Each characteristic root λ of A lies in the interior or on the boundary of Γ_k. If $\{\Gamma_k\} \to \Gamma$ than at least one of the characteristic roots λ of A lies on the boundary of Γ.

Theorem 12. If $P_1(\alpha_1, \beta_1), P_2(\alpha_2, \beta_2), \cdots, P_n(\alpha_n, \beta_n)$ are vertex of a polygon σ, we have

$$|\sigma| \leqq (b_1 c_1)^{\frac{1}{2}}.$$

第9卷 第2期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 2
1959年6月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　June, 1959

环面上具有一个奇点的积分曲綫分布之拓扑結构

李 文 鏞*

（中国科学院数学研究所）

考虑带有一个奇点的微分方程在环面上所确定的积分曲綫的拓扑結构．因环面之示性数为 0，由环面上奇点的指数与环面示性数之間的关系知：所考虑的奇点的指数为 0．因此，問題首先化为考虑在指数为 0 的奇点的邻近积分曲綫分布的拓扑結构問題．

引理 1[1)]：至少有两条半积分曲綫流入或流出奇点．

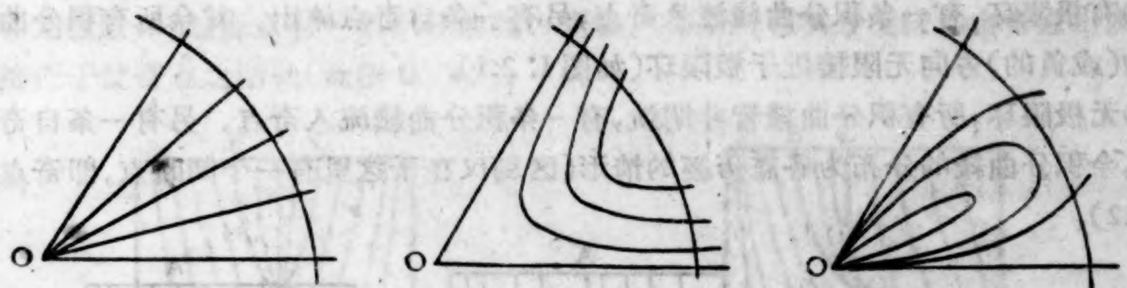
这引理保証了可将奇点附近划分成扇形来考慮．

定义 1：三种基本扇形：

（1）抛物的：过扇形內任一点的积分曲綫一端在扇形外，另一端在扇形內止于奇点．

（2）双曲的：过扇形內任一点的积分曲綫的两端都在扇形外．

（3）橢圓的：过扇形內任一点的积分曲綫的两端者在扇形內，且都止于奇点．



抛物的　　双曲的　　橢圓的

根据环面的对称性[2)]，必須考虑扇形的可接合性，容易看出：一个双曲的扇形和一个橢圓的扇形可接合；两个双曲的扇形可接合；两个抛物的扇形可接合．

按 H. Poincaré 的定义：奇点的指数 $J=\dfrac{E-I-2}{2}$，其中 E 表示外接触之个数，I 表示內接触之个数．　由三种基本扇形之定义知每个双曲的扇形相应于一个外接触，每个橢圓的扇形相应于一个內接触，抛物的扇形与接触无关，由此知：奇点的指数为 0 等价于在奇点附近双曲的扇形之个数等于橢圓的扇形之个数加 2（这里每种扇形都是有限个，不会出現无限多个的情形）．

以下恆假定：在奇点附近双曲的扇形为 h 个，橢圓的扇形为 k 个，抛物的扇形为 l 个．

首先考虑最簡单最基本的情形：$k=0$，然后再討論 $k\neq 0$ 的情形．

---

* 現在內蒙古大学．

1) 此引理可由 В. В. Немыцкий 和 В. В. Степанов 合著的"微分方程定性論"第二章．§3．定理 11 及 Bendixson 的文章（*Acta Math.* Vol. 24 (1901), 1–88）中第一章 § 17 的定理推得．

2) 环面可切开为正方形（或长方形），在其相对的边的对应点上积分曲綫的斜率相同，这种性質我們称为环面的对称性．

引理 2: $h=k+2$, $k=0$ 时由其他两种基本扇形所构成的奇点附近的拓扑結构有且仅有下列三类可能的图形: $l=0$, $h=2$; $l=1$, $h=2$; $l=2$, $h=2$. 反之，当奇点附近的扇形为 $k=0$, $l=0$, $h=2$; $k=0$, $l=1$, $h=2$ 或 $k=0$, $l=2$, $h=2$ 时；均可在奇点附近切开一个边界作适当的对应之后合成一个环面.

証明: 分开三种情形来討論:

(I) $l=0$, $h=2$. 这时只有两个扇形，設其分界綫为 OA, OB. A、B 两点可重合，也可不重合. 以下分別討論.

(1) A、B 两点重合:

①有极限环，过奇点之积分曲綫为閉軌. 其余所有积分曲綫皆一端无限接近于极限环，另一端无限接近于过奇点之閉軌(如图 I. 1.1).

②无极限环，过奇点之积分曲綫为閉軌. 其余所有积分曲綫也都是閉軌(如图 I.1.2).

③无极限环，过奇点之积分曲綫为閉軌. 其余所有积分曲綫都是螺旋的，两端都无限接近于过奇点之閉軌(如图 I. 1.3).

(2) A 与 B 不重合，即假定 A, B 不在同一条积分曲綫上，否则可合併于(1)的情形来討論. A 在 B 之右与 B 在 A 之右的拓扑結构是相同的，故只需考虑其中之一，例如考虑 A 在 B 之右的情形:

①有极限环，有一条积分曲綫流入奇点，另有一条自奇点流出. 其余所有积分曲綫都从正的(或負的)方向无限接近于极限环(如图 I. 2.1).

②无极限环，所有积分曲綫皆非閉軌，有一条积分曲綫流入奇点，另有一条自奇点流出. 其余积分曲綫的分布为各态历經的情形(区別仅在于这里有一个間断点，即奇点)(如图 I. 2.2).

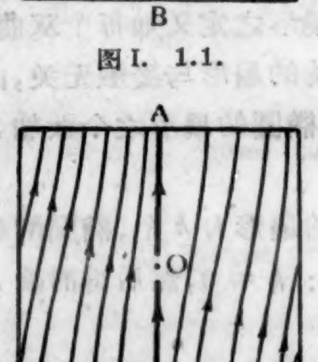


图 I. 1.1.

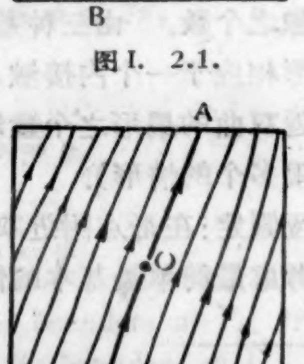


图 I. 2.1.

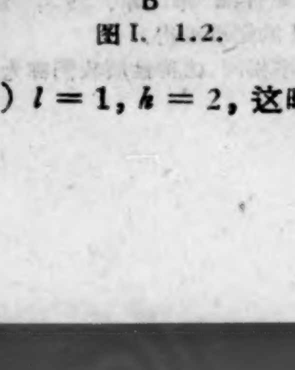


图 I. 1.2.

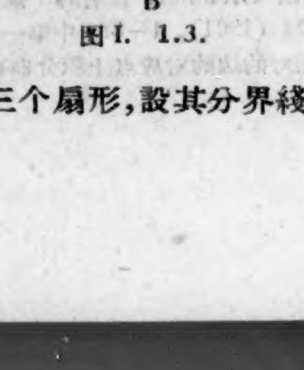


图 I. 1.3.

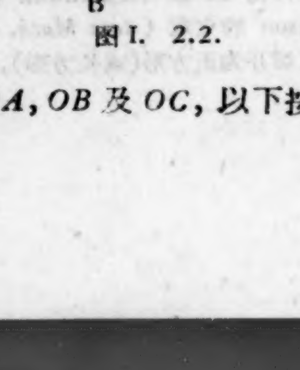


图 I. 2.2.

(II) $l=1$, $h=2$, 这时有三个扇形，設其分界綫为 OA, OB 及 OC, 以下按 A, B, C

三点之排列次序来討論各种不同的拓扑結构。

（1）A 位于 B, C 之間：

①有极限环，除一条积分曲綫为过奇点之閉軌外，其余所有积分曲綫都是由奇点出发，最后无限接近于极限环（如图 II. 1.1）。

②无极限环，这种情形不存在。

（2）A 不位于 B、C 之間，且不与 B 或 C 重合，也就是不存在过奇点之閉軌。A, B, C 三点之次序可为 A, B, C 或 B, C, A，这两种情形之拓扑結构是相同的，故只需考慮其中之一，例如考慮 B, C, A 的情形：

①有极限环，有一条积分曲綫流入奇点。其余的有一部分积分曲綫由奇点出发，最后无限接近于极限环。还有一部分不經过奇点，两端都无限接近于极限环（如图 II. 2.1）。

②无极限环，这种情形可由图 I. 2.2 經过第三类作法导出。

（3）A 与 B 或 C 重合，这两种情形的拓扑結构是相同的，故只需考慮其中之一郎可，例如考慮 A 与 C 重合的情形：

①有极限环，过奇点有一条积分曲綫为閉軌。其余有一部分积分曲綫由奇点出发，最后无限接近于极限环。还有一部分积分曲綫不經过奇点，其一端无限接近于极限环，另一端无限接近于过奇点之閉軌（如图 II. 3.1）。

②无极限环，过奇点有一条积分曲綫为閉軌。其余所有积分曲綫均由奇点出发，最后无限接近于过奇点之閉軌（如图 II. 3.2）。

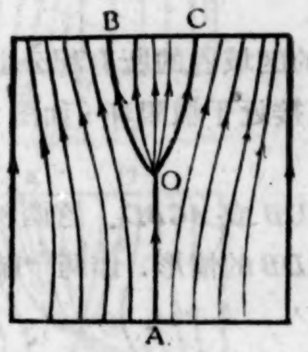


图 II. 1.1.

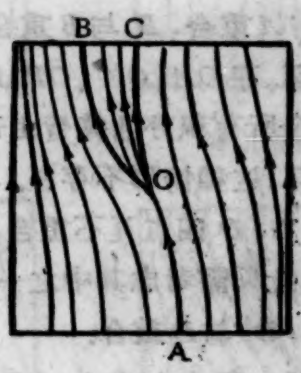


图 II. 2.1.

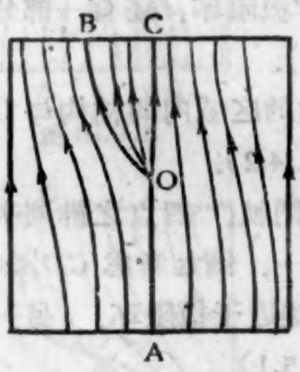


图 II. 3.1.

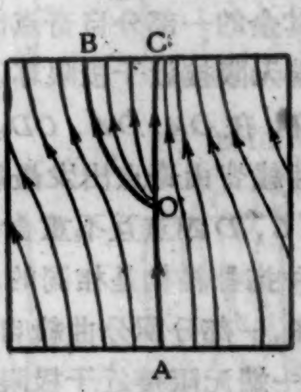


图 II. 3.2.

（III）$l=2$, $h=2$，这时有四个扇形，設其分界綫为 OA, OB, OC, OD，以下根据 A, B, C, D 四点之排列次序来考慮各种不同的拓扑結构。

（1）A 与 C 重合，B 与 D 重合：

①有极限环，在 OA, OB, OC, OD 四条綫所围成的区域內的所有积分曲綫均为过奇点之閉軌．其余所有积分曲綫都不經过奇点，其一端无限接近于极限环，另一端无限接近于閉軌 $OACO$ 或 $OBDO$(如图 III．1.1)．

②无极限环，在 OA, OB, OC, OD 四条綫所围成的区域內的所有积分曲綫均为过奇点之閉軌．其余所有积分曲綫都是不經过奇点之閉軌(如图 III．1.2)．

③无极限环，在 OA, OB, OC, OD 四条綫所围成的区域內的結构 III．1.1 相同．其余所有积分曲綫都不經过奇点，一端无限接近于閉軌 $OACO$，另一端无限接近于閉軌 $OBDO$ (如图 III．1.3)．

(2) A 与 C 重合，四点之次序为 $A(C)BD$ 或 $A(C)DB$；或 B 与 D 重合，四点之次序为 $ACB(D)$ 或 $CAB(D)$，这四种情形之拓扑結构是相同的，故只需考虑其中之一，例如考虑 $CAB(D)$ 的情形．作一个輔助点 A'，使 A' 与 A 重合．

①有极限环，在 OA, OA', OB, OD 四条綫所围成的区域內的所有积分曲綫均为过奇点之閉軌．其余一部分积分曲綫自奇点出发最后无限接近于极限环．另一部分积分曲綫不經过奇点，一端无限接近于极限环，另一端无限接近于閉軌 $ODBO$ (如图 III．2.1)．

②无极限环，在 OA, OA', OB, OD 四条綫所围成的区域內的結构与 III．2.1 相同．其余所有积分曲綫均由奇点出发，最后无限接近于閉軌 $ODBO$ (如图 III．2.2)．

(3) A, B, C, D 四点互不重合，它們的排列次序为 $CABD$ 或 $ACDB$．这两种情形的拓扑結构是相同的，故只需考虑其中之一即可，例如考虑 $CABD$ 的情形．作两个輔助点 A'、B'，使 A' 与 A 重合，B' 与 B 重合．

①有极限环，在 OA、OA'、OB、OB' 四条綫所围成的区域內的所有积分曲綫均为过奇点之閉軌．其余所有积分曲綫皆由奇点出发，最后无限接近于极限环(如图 III．3.1)．

②无极限环，这种情形不存在．

(4) A、B、C、D 四点互不重合，其排列次序为 $CADB$ 或 $ACBD$．这两种情形之拓扑結构是相同的，故只需考虑其中之一即可，例如考虑 $CADB$ 的情形．作两个輔助点 A', D'，使 A' 与 A 重合，D' 与 D 重合．

①有极限环，在 OA, OA', OD, OD' 四条綫所围成的区域內的所有积分曲綫都是过奇点之閉軌．其余的一部分自奇点出发最后无限接近于极限环．还有一部分是一端最后回到奇点另一端无限接近于极限环(反向)(如图 III．4.1)．

②无极限环，在 OA, OA', OD, OD' 四条綫所围成的区域內的結构与 III．4.1 相同．其余所有积分曲綫皆由奇点出发最后回到奇点(如图 III．4.2)．

(5) A, B, C, D 四点互不重合，即不存在过奇点的閉軌．四点之排列次序为 $ABCD$ 或 $CDAB$，这两种拓扑結构是相同的，故只需考虑其中之一．例如考虑 $CDAB$ 的情形．

①有极限环，一部分积分曲綫自奇点出发最后无限接近于极限环．另一部分一端最后回到奇点，另一端无限接近于极限环(反向)(如图 III．5.1)．

②无极限环，不存在过奇点之閉軌．所有积分曲綫皆由奇点出发，最后仍回到奇点(如图 III．5.2)．

(6) C 与 B 重合，四点之排列次序为 $AC(B)D$；或 A 与 D 重合，四点之排列次序为 $CD(A)B$，这两种拓扑結构是相同的，故只需考虑其中之一．例如考虑 $CD(A)B$ 的情形：

①有极限环，*AOD* 为过奇点之閉軌．其余一部分积分曲綫自奇点出发，最后无限接近于极限环．还有一部分一端最后回到奇点，另一端无限接近于极限环(反向)（如图 III．6.1)．

②无极限环，*AOD* 为过奇点之閉軌．其余所有积分曲綫皆由奇点出发，最后仍回到奇点(如图 III．6.2)．

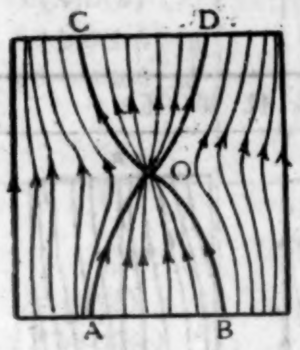


图 III. 1.1.

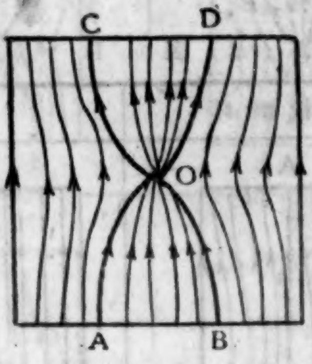


图 III. 1.2.

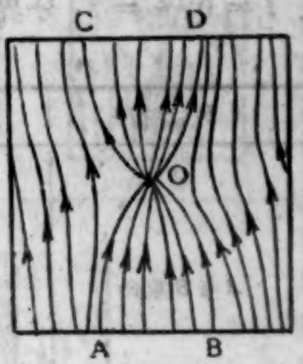


图 III. 1.3.

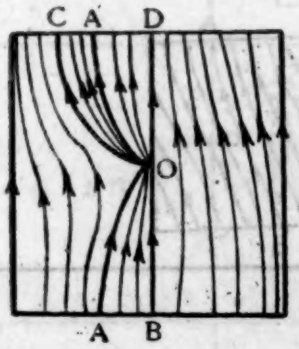


图 III. 2.1.

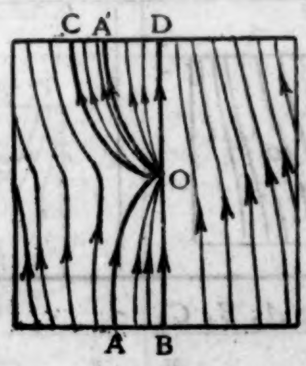


图 III. 2.2.

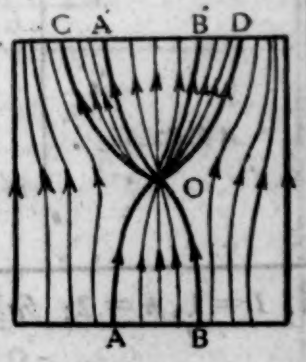


图 III. 3.1.

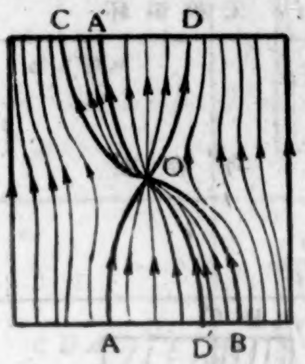


图 III. 4.1.

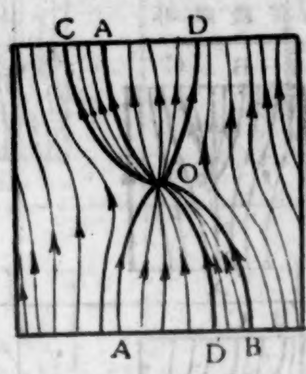


图 III. 4.2.

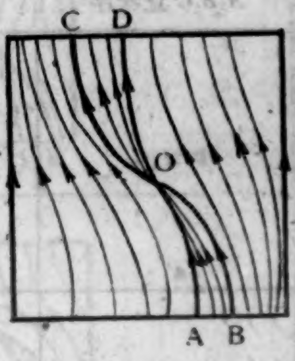


图 III. 5.1.

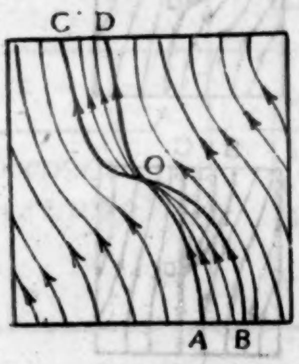


图 III. 5.2.

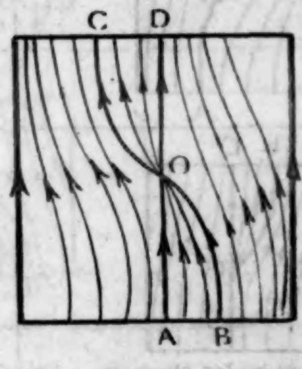


图 III. 6.1.

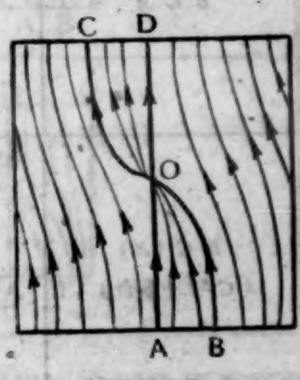


图 III. 6.2.

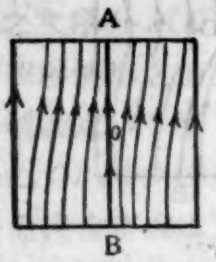
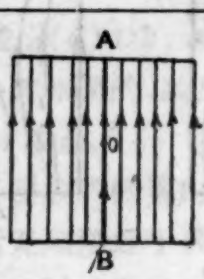
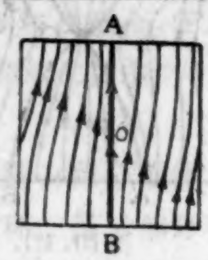
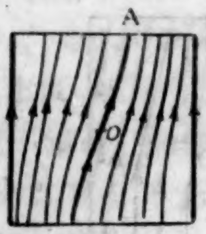
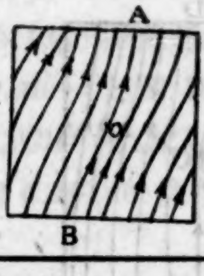
$h=2$，$l\geqslant 3$ 时的图形与 $l=1,2$ 时的图形的拓扑結构相同，故当 $k=0$ 时有且仅有这三类图形.

$h=2$，$l=0,1,2$ 时奇点的指数显然为 0，又由扇形之可接合性，知可繞奇点切开一个边界，作适当的对应之后可将其合成一个环面. 証毕.

引理 2 中所考虑的三类图形以下称为三类基本图形. 为清楚明瞭起見，列出下表：

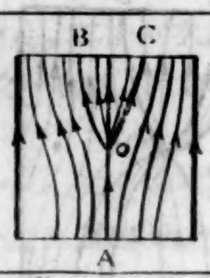
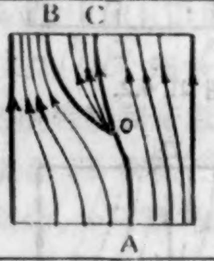
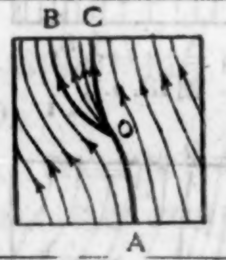
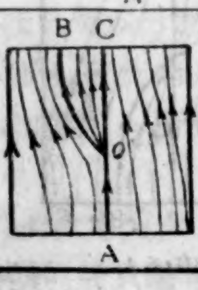
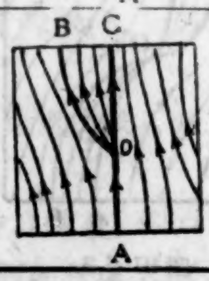
I. $l=0$，$h=2$：分界点为 A，B.

表 I

A,B 之次序	有极限环	无极限环
A 与 B 重合		 
A 在 B 之右		

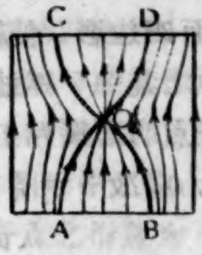
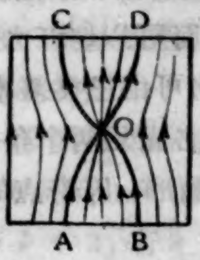
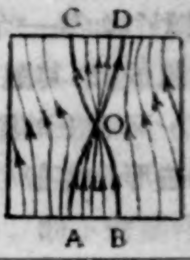
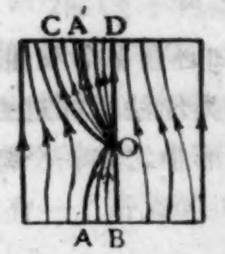
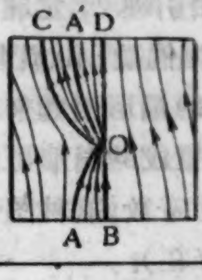
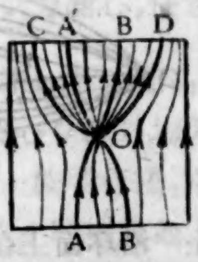
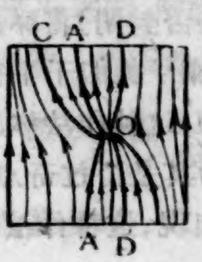
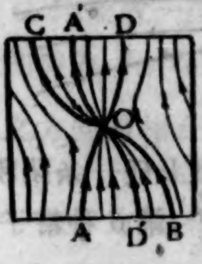
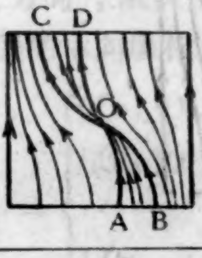
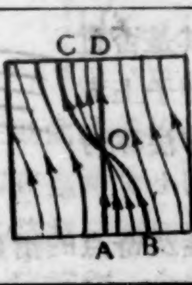
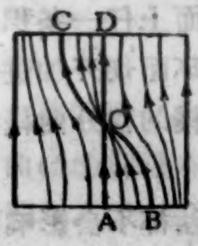
II. $l=1$，$h=2$：分界点为 A，B，C.

表 II

A,B,C 之次序	有极限环	无极限环
B A C		不存在
B C A		
B C (A) (C 与 A 重合)		

III. $l=2$, $h=2$：分界点为 A, B, C, D.

表 Ⅲ

A,B,C,D 之次序	有极限环	无极限环
$C(A)D(B)$ (A 与 C 重合，B 与 D 重合)		 
$CAD(B)$ (B 与 D 重合)		
$CABD$		不存在
$CADB$		
$CDAB$		
$CD(A)B$ (A 与 D 重合)		

以上考虑的是最簡单最基本的情形，現在从三类基本图形出发来討論所有可能的拓

(1)

扑結构.

定义 2: 沿环面上任一条过奇点的閉积分曲綫将环面切开,加进去一条带子,这带子是由两条形如(1)的带形組成的,这种作法称为第一类作法.

定理 1: 如果一个环面可以切开为一个平面四边形,使得其图形只由有限个三种基本扇形所組成,则其图形必可由三类基本图形中之某一个經过第一类作法而得到.

証明:环面上的图形必滿足两个条件:①奇点的指数为 0,②对称性.設将环面切开为平面四边形,共有 n 个扇形,因奇点的指数为 0,故 $h=k+2$,以下分三种情形来討論:

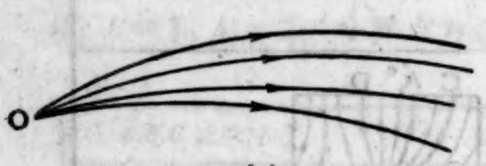
(1) $k=0$,由引理 2,定理显然成立.

(2) $k>0$,k 为偶数,由扇形的可接合性知必有 k 个双曲的扇形与之接合,两个双曲的扇形和两个椭圓的扇形接起来就是我們第一类作法所加进去的带子,故可知每一个只由三种基本扇形所組成的图形可由三类基本图形中之某一个經过第一类作法而得到.

(3) $k>0$,k 为奇数,这种图形在环面上不出現(因方向場不存在).

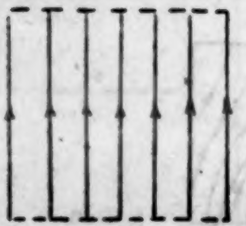
定义 3: 沿环面上任一条过奇点的閉积分曲綫将环面切开,加进去一条带子,这带子是由两条形如(2)的带形組成的,这种作法称为第二类作法.

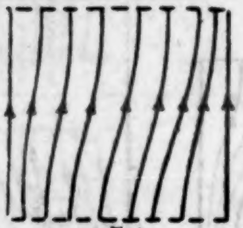
(2)


(3)

定义 4: 沿环面上任一条过奇点之积分曲綫(无論其是否封閉)将环面切开,加进去一条带子,这带子上充满了类似于平行綫的积分曲綫(平行于带子的边綫),这种作法称为第三类作法.

定义 5: 沿环面上任一条閉积分曲綫(无論其是否过奇点)将环面切开,加进去一条 Kneser 所考慮的带子,第 6 种带子必須成对地出現,这种作法称为第四类作法.


(4)


(5)

(6)

定义 6: 沿环面上任一条积分曲綫(无論其是否过奇点,是否封閉)将环面切开加进去一条带子,带子上充满了平行于带子边綫的积分曲綫(如图),这种作法称为第五类作法.

(7)

以上这五类作法都不会影响到环面之对称性及奇点的指数,并且每一类作法都可作其逆作用,这种逆作用也不会影响环面的对称性和奇点的指数.

基本定理: 环面上带有一个奇点的微分方程所确定的积分曲綫分布的所有可能的拓

扑結构，均可由三类基本图形中之任一个經过第一至第五类作法或其中某几个作法的可数次作用而得到.

証明：我們所考虑的环面上的积分曲綫的分布要满足两个条件：①奇点的指数为 0，②对称性．三类基本图形中之每一个均满足这两个条件，而按定义知第一至第五类作法都不影响奇点的指数和环面的对称性，所以由这三类基本图形中之一个經过第一至第五类作法或其中之某几个作法的可数次作用后所得到的图形一定可以在环面上实現.

对于环面上巳給定的任何图形均可經过第一至第五类作法或其中某几个作法的可数次逆作用后，得到三类基本图形中之某一个．因为环面上的图形都满足两个条件：①奇点指数为 0．②对称性．因奇点之指数为 0 故 $h = k + 2$，若 k 为 0，則不需要作第一类作法的逆作用，若 $k \neq 0$，$k = 2m$（k 不可能为奇数），則首先作 m 次第一类作法的逆作用，使得 $k = 0$，这时再依次检查有沒有第二、三、四、五类作法所加进去的那种类形的带子，若有則用其逆作用将带形收縮为一条积分曲綫，經过这样逆作用之后环面上的图形，只是由双曲的和抛物的两类扇形所构成，由引理 2 知其必为三类基本图形中之某一个．証毕.

可微分性：环面上具有一个奇点的正則曲綫族均可与一微分方程相对应．以下来証明这一事实．在环面上以 O 为圆心，任意小的正数 $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \cdots, \frac{\varepsilon}{n}, \cdots$ 为半径作一串小圆 $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$．令环面上位于圆 C_1 外之部分区域为 D_1，位于圆 C_1, C_2 之間的部分区域为 $D_2, \cdots$．环面上除圆心 O 以外均为正規点，在每一正規点的邻近均可作一小邻域，使位于其上的曲綫同胚于一族平行綫，根据海涅-波雷耳定理，区域 $D_i(i = 1, 2, \cdots)$ 可被有限个小区域盖住，取这些小区域为如上所述之正規点的邻域．为清楚起見我們将区域 $D_i(i = 1, 2, \cdots)$ 之边界作适当修整，即将原来之 C_{i-1}, C_i 均換成一些折綫，这些折綫是由小区域的边界的一部分联成的．将修整后的区域相应地称为 $E_1, E_2, \cdots$．区域 E_1 內之曲綫在每一点之切綫恰好与一微分方程 $\frac{dy}{dx} = f_1(x, y)$ 之方向場相合（这里不区別綫段之方向）．同理区域 E_n 內之曲綫在每一点之切綫恰好与一微分方程 $\frac{dy}{dx} = f_n(x, y)$ 之方向場相合（也是不区別綫段之方向），依次下去，知在整个环面上具有一个奇点（指数为 0）的正則曲綫族与一个微分方程的方向場相合（不区別綫段之方向），这微分方程可写为：

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} f_1(x, y) & (x, y) \in E_1, \\ f_2(x, y) & (x, y) \in E_2, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_n(x, y) & (x, y) \in E_n, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$$

不仅如此，还可以証明这正則曲綫族恰巧是如上的微分方程的积分曲綫，即考虑切綫段之方向也无妨．假設不然，即在某两个小区域相接的地方曲綫的切綫方向相反，这样可导出矛盾，我們沿此綫及其延长綫将环面切开，沿曲綫逆行到 0 点，这段曲綫被有限多个小区域盖住，依曲綫之方向給小区域作一个定向，再依此方式沿曲綫到切开的边界，在此过程中所涉及到的每个小区域都有了定向，最后在相接处的曲綫的切綫方向相反的两个小区

域的相接边上得到不同的定向，这时如再依同样的定向接起来得到的不再是环面了，由此得到矛盾，証明了上述的事实.

关于动力系統的問題，由于其等价于一个微分方程，再根据上面所考虑的事实，知其拓扑結构是完全一致的，不必另行考虑.

以上討論的是环面上只有一个奇点的情形，现在来看一看环面上具有有限多个奇点的情形. 若环面上具有有限多个奇点，我們可在环面上作一圓 C，将所有的奇点均包含在 C 內. 因环面上所有奇点的指数和为 0，故沿 C 的指数也为 0. 将圓 C 收縮为一点，这时环面上只有一个奇点，且此奇点之指数为 0，这正是我們前面所考虑过的，故环面上具有有限多个奇点的积分曲綫分布的拓扑結构問題，可化为考虑平面上有限多个奇点的积分曲綫分布的拓扑結构問題，这有限多个奇点的指数的总和为 0. 如这个平面上的問題解决了，那么可将此图形装入环面上的圓 C 內，而 C 外的图形已确定了，故只要再作适当的对应就可将整个环面上具有有限多个奇点的积分曲綫分布的拓扑結构完全确定了.

[誌謝] 本文在秦元勳先生指导下作成的，謹此致謝.

参 考 文 献

[1] Пуанкаре А. О кривых определяемые дифференциальными уравнениями.

[2] Kaplan W. The structure of a curve-family on a surface in the neighborhood of an isolated singularity. *American Journal of math.* **46**, 1942.

[3] Kaplan W. Differentiability of regular curves families on the sphere. Lectures in topology. The University of Michigan, conference of 1940.

[4] Kneser, H. Regulare Kurvenscharen auf den Ringflachen, *Math. Ann.* **91** (1923), 135—154.

THE TOPOLOGICAL STRUCTURE OF THE DISTRIBUTION OF THE INTEGRAL CURVES WITH ONE SINGULAR POINT ON THE TORUS

LEE WEN-YUNG

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper we consider the topological structure of the distribution of the integral curves with one singular point on the torus.

First of all, we define three kinds of sectors. We consider the neighborhood of the singular point by separating it into sectors. Using the property of the torus and the fact that the sum of the index of the singular point is equal to zero, we obtain three classes of foundamental figures (see Tables I, II and III, on page 186—187).

We define five classes of operations. We proved that from the three classes of foundamental figures and the five classes of operations we can obtain all possible topological structure with one singular point on the torus.

Finally, we proved the differentiability of the figure and considered also the case of a finite number of singular points on the torus.

第 9 卷 第 2 期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 2
1959 年 6 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　June, 1959

某些芬斯拉空間的对称性质

忻 鼎 稼
(复旦大学数学系)

E. 嘉当在他的黎曼几何教程[1]中系統地討論了对称的黎曼空間，并給出了充要条件的分析形式及一系列有趣的性质．本文在芬斯拉空間中引进了嘉当在黎曼几何中所定义的“对称”概念后(第一节)，对这类芬斯拉空間的对称性质作了詳尽的討論．得到的結果如下：

(一) 在 F_n 的一区域 Ω 內，把任一向量关于 0 点 ($0\in\Omega$) 作对称推移和沿經过 0 的极値曲綫作平行推移（以后在不引起混淆的情况下，簡称为“向量經过平行推移及对称推移”)，为使这时所得結果之差为三阶小量，充要条件是：挠率张量的共变导数在 Ω 中等于零．E. Cartan[1] 对这种空間已作了一些几何說明，而这里給了一个新的几何特征．我們称这样的芬斯拉空間为亚对称的，黎曼空間即为其中最常見的一个．

(二) 在第二节定义广义的对称概念，并証明：当任一向量經广义的对称推移和平行推移后所得之差为二阶以上小量时，广义对称必須是嘉当的对称．从而得到(一)的結論与嘉当的对称的密切联系，并对挠率张量等于零的空間中过一定点 0 的极値曲綫全体給出一个几何特征．

(三) 在亚对称空間中，把向量关于一定点 0 作对称推移与沿經过 0 的极値曲綫平行推移后所得結果为四阶小量，充要条件是曲率张量 $R_i{}^j{}_{kh}$ 在 0 点的共变导数为零．

(四) 在 F_n 的一区域 Ω 內，向量关于任一点 0 經对称推移与沿过 0 的极値曲綫平行推移后所得之差为四阶小量，充要条件是 $A_i{}^j{}_{k|l}=0$, $R_i{}^j{}_{kh|l}=0$ 在 Ω 中成立．

称这类空間为对称芬斯拉空間．

关于对称和亚对称空間的更进一步討論，将在別的文章中进行．

本文所用的記号及它們的定义除了有特別說明外，均照前面提到的 E. 嘉当的著书及(2)，并且我們广泛的利用了他在黎曼几何中所創的特选标形及基本方程的概念．

§ 1. F_n 的組織方程和法座标　設 F_n 为 n 維芬斯拉空間，它的基本函数 $F(x, \dot x)$ 滿足通常熟知的条件，卽它关于 $(x, \dot x)$ 是三阶連續可导的，关于 $\dot x^i$ 是正齐一次，并且为正的函数，于每点 $(x^i, \dot x^i)$ 装上标形 (e_i)，于是点 M 的位移，标形 (e_i) 的轉动，单位綫素 l 的几何变差，依次在标形 (e_i) 上具有分解式

$$dM=\omega^i e_i,\quad dl_i=\omega_i^j e_j,\quad dl=\tilde\omega^i e_i.$$

由于在自然标形时成立

$$D(dx^i)=A_j{}^i{}_k[\tilde\omega^j dx^k],$$

式中，D 是指微小张量的絕对外微分，并且它是一张量关系式，因此在任何标形下成立下式

$$D(\omega^i)=A_j{}^i{}_k[\tilde\omega^j\omega^k]. \tag{1}$$

这里的 $A_j{}^i{}_k$ 是挠率张量在标形上的分量，并以分解式

$$(\omega^i_j)' + [\omega^i_k \omega^k_j] = \tfrac{1}{2} S_j{}^i{}_{kh}[\varpi^k\varpi^h] + P_j{}^i{}_{kh}[\varpi^k\omega^h] + \tfrac{1}{2} R_j{}^i{}_{kh}[\omega^k\omega^h] \tag{2}$$

的系数 $S_j{}^i{}_{kh}$, $R_j{}^i{}_{kh}$, $P_j{}^i{}_{kh}$ 来表示 F_n 的曲率张量．实际上，此式是标形向量 e_j 繞一微小平行四边形平行移动后所得的几何增量——$(d\delta - \delta d)e_j = \{(\omega^i_j)' + [\omega^i_k \omega^k_j]\}e_i$ 在标形上之分解式，因此，分解系数 $S_j{}^i{}_{kh}$, $P_j{}^i{}_{kh}$, $R_j{}^i{}_{kh}$ 确为在自然标形时相应的曲率张量在任意标形时的分量，由于在自然标形下成立（見[2] § 42）

$$l^j\{(\omega^i_j)' + [\omega^i_k \omega^k_j]\} = D(\varpi^i)$$

此为一张量关系式，故在一般标形下也需成立，即：

$$D(\varpi^i) = P_0{}^i{}_{kh}[\varpi^k\omega^h] + \tfrac{1}{2} R_0{}^i{}_{kh}[\omega^k\omega^h] + \tfrac{1}{2} S_j{}^i{}_{kh}[\varpi^k\varpi^h]. \tag{3}$$

我們称方程(1)(2)(3)为 F_n 的組織方程．

設 F_n 中 $A_j{}^i{}_{k\|l} = 0$，如 E. 嘉当所指出，此时 $\Gamma^*{}_j{}^i{}_k$ 不再含有 x^i，即任一向量沿一路径的平行移动与所装于路径上的平行綫素列无关，并可知，对任一点 0，定可找一区域 Ω，在 Ω 内任一异于 0 的点 P，連 $0P$ 的极值曲綫有且只有一条．由是仿照黎曼几何中的方法，可在 Ω 内引进关于 0 的极座标系：$x^i = \alpha^i t$ 但在問題的討論中，最后的結果仅与 $\alpha^i t$ 之乘积有关，故 α^i 取方向数已足，t 不必为弧长参数．如欲写下(x^i)之表示式时，只須把 $t=1$, $a^i = x^i$ 即得．在 0 任取一綫素 l_0 和标形 $(e_i)_0$ 并定好法座标，在 Ω 内任一点 $M(a^i t)$ 的綫素 l 和标形 (e_i) 是如此确定的：把 l_0 沿极值曲綫平行移动到 M 并把 $(e_i)_0$ 沿极值曲綫平行移动到 M 得 l 和 (e_i) 以此定为 M 的綫素和标形，在 Ω 内如此确定的綫素和标形称为关于 0 的特选綫素和特选标形．今考虑在特選标形下的 $\omega^i(t, a, dt, da)$, $\varpi^i(t, a, dt, da)$, $\omega^i_j(t, a, dt, da)$ 的表示式．由于它們都是由于点的移动所引起，故可分二步考虑之：先变动 t，即沿极值曲綫移动，后变动 a^i，即沿“极值圓”移动，则得

$$\omega^i(t, a, dt, da) = a^i dt + \bar{\omega}^i(t, a, da), \tag{4}$$

$$\omega^i_j(t, a, dt, da) = 0 + \bar{\omega}^i_j(t, a, da), \tag{5}$$

$$\varpi^i(t, a, dt, da) = 0 + \bar{\varpi}^i(t, a, da). \tag{6}$$

后二式成立是显然的，前一式成立是由于在 $A_j{}^i{}_{k\|l} = 0$ 时，向量列的平行性与所装的平行綫素列无关，但若取极值曲綫切綫上单位向量为綫素，则极值曲綫上的移动 dM 都是平行的（移动同一微小距离），故在特选綫素下也是平行的，所以在特选标形下的分量为常数 $a^i dt$．把(4)(5)(6)代入組織方程中去，得到

$$[da^i dt] + \left[dt \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t}\right] = [(a^k dt + \bar{\omega}^k), \bar{\omega}^i_k] - A_k{}^i{}_h[a^k dt + \bar{\omega}^k, \bar{\varpi}^h], \tag{7}$$

$$\left[dt, \frac{\partial \bar{\varpi}^i}{\partial t}\right] + d\bar{\varpi}^i = [\bar{\varpi}^h, \bar{\omega}^i_h] + \frac{1}{2} R_0{}^i{}_{kh}[a^k dt + \bar{\omega}^k, a^h dt + \bar{\omega}^h], \tag{8}$$

$$\left[dt, \frac{\partial \bar{\omega}^i_j}{\partial t}\right] + d\bar{\omega}^i_j = [\bar{\omega}^k_j \bar{\omega}^i_k] + \frac{1}{2} S_j{}^i{}_{kh}[\bar{\varpi}^k\bar{\varpi}^h] + \frac{1}{2} R_j{}^i{}_{kh}[a^k dt + \bar{\omega}^k, a^h dt + \bar{\omega}^h]. \tag{9}$$

式中 $d\bar{\omega}^i$, $d\bar{\omega}^i_j$, $d\bar{\varpi}^i$ 依次是把 t 看成为参数时关于 a 的外微分．比較二边含 dt 的項，得出

$$\frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = da^i + \bar{\omega}^i_k \omega^k - A_k{}^i{}_h a^k \bar{\varpi}^h, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \bar{\varpi}^i}{\partial t} = \qquad R_0{}^i{}_{kh} a^k \bar{\varpi}^h, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_j^i}{\partial t} = \qquad R_j{}^i{}_{kh} a^k \bar{\omega}^h, \tag{12}$$

当 $t=0$ 时，$\bar{\omega}^i = \bar{\omega}_j^i = \bar{\omega}^i = 0$ 把它們再对 t 求导一次，得到一种测地离差方程：

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}^i}{\partial t^2} = R_k{}^i{}_{hl} a^k a^h \bar{\omega}^l - A_k{}^i{}_h a^k R_0{}^h{}_{jl} a^j \bar{\omega}^l, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}^i}{\partial t^2} = R_0{}^i{}_{kh|l} a^k a^l \bar{\omega}^h + R_0{}^i{}_{kh} a^k (da^h + a^l \bar{\omega}_l^h - A_l{}^h{}_m a^l \bar{\omega}^m), \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_j^i}{\partial t^2} = R_j{}^i{}_{kh|l} a^k a^l \bar{\omega}^h + R_0{}^i{}_{kh} a^k (da^h + a^l \bar{\omega}_l^h - A_l{}^h{}_m a^l \bar{\omega}^m). \tag{15}$$

当 $t=0$ 时，$\bar{\omega}^i = \bar{\omega}_j^i = \bar{\omega} = \frac{\partial \omega_j^i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = 0$，$\frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = da^i$，式中 $\frac{\partial X:::}{\partial t} = X:::_{|l} a^l$ 的理由是：当綫素标形都平行移动时，$d = D$，所以沿极值曲綫移动时，$d = D$。

今設法解出 $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}_j^i$, $\bar{\omega}^i$ 为 (x, dx) 的显示式．为此，令

$$\left.\begin{aligned} \bar{\omega}^i - t\,da^i &= B_k{}^i{}_h a^k da^h, \\ \bar{\omega}_j^i &= C_j{}^i{}_{kh} a^k da^h, \\ \bar{\omega}^i &= D_k{}^i{}_h a^k da^h. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

所以 $t=0$ 时，$B_j{}^i{}_k = D_j{}^i{}_k = C_j{}^i{}_{kh} = 0$．以此組第一式代入(13)，整理后，得

$$\frac{\partial^2 B_k{}^i{}_h}{\partial t^2} = R_m{}^i{}_{pl} a^p B_k{}^l{}_h + t R_r{}^i{}_{kh} a^r - A_m{}^i{}_p R_0{}^p{}_{jl} a^m a^j B_k{}^l{}_h - t A_r{}^i{}_l a^r R_0{}^l{}_{kh}, \tag{17}$$

依次关于 t 求导，就可得到

$$t=0,\; B_k{}^i{}_h = 0,\; \frac{\partial B_k{}^i{}_h}{\partial t} = 0,\; \frac{\partial^2 B_k{}^i{}_h}{\partial t^2} = 0,\; \frac{\partial^3 B_k{}^i{}_h}{\partial t^3} = (R_r{}^i{}_{kh} - A_r{}^i{}_l R_0{}^l{}_{kh}) a^r,$$

$$\frac{\partial^4 B_k{}^i{}_h}{\partial t^4} = 2(B_r{}^i{}_{kh} - A_r{}^i{}_l R_0{}^l{}_{kh})_{|m} a^r a^m, \cdots$$

故得

$$\omega^i(t, a, dt, da) = a^i dt + \bar{\omega}^i = a^i dt + t\,da^i + B_k{}^i{}_h a^k da^h =$$

$$= \left\{\frac{1}{6} t^3 a^r (R_r{}^i{}_{kh} - A_r{}^i{}_l R_0{}^l{}_{kh})_0 + \frac{1}{12} t^4 a^r a^l (R_r{}^i{}_{kh} - A_r{}^i{}_l R_0{}^l{}_{kh})_{|l_0} + o(t^5)\right\} a^k da^h \tag{18}$$

以 $a^i = x^i$, $da^i = dx^i$, $t = 1$ 代入之，則得

$$\omega^i(x, dx) = dx^i + \frac{1}{6} x^r x^k (R_r{}^i{}_{kh} - A_r{}^i{}_l R_0{}^l{}_{kh})_0 dx^h +$$

$$+ \frac{1}{12} x^r x^l x^k (R_r{}^i{}_{kh} - A_r{}^i{}_s R_0{}^s{}_{kh})_{|l_0} dx^h + o(s^4), \tag{19}$$

这表示一向量在法座标的自然标形上的分量与在特选标形上的分量的关系式．以后常用之．

§ 2. 对称推移和亚对称空間　广义的对称推移　　仍設 $A_j{}^i{}_{k|l} = 0$ 設想在一点 0 定义一个点变换 $M \to M'$，使二对应点 M, M' 同在一条过 0 的极值曲綫的两侧而且弧长 $\overset{\frown}{OM}$, $\overset{\frown}{OM'}$ 相等．称此变换为点的对称变换．如取关于 0 的法座标，則可表示这变换为

$$(x^i)' = -(x^i). \tag{20}$$

方向 $(X^i)_M$ 經过对称变换后变为 $(X^i)'_{M'}$

$$(X^i)'_{M'} = -(X^i)_M \tag{21}$$

作方向 $-(X^i)'_{M'}$ 称这方向为 $(X^i)_M$ 經对称推移后所得的方向. 今考察一向量經过对称推移与平行推移后所得結果之差的阶数.

在 0 点的近旁装上特选标形,設此向量在法座标的自然标形上的分量为 dx^i, 則在特选标形上的分量 $\omega^i(x, dx)$ 为(19)所完全确定. 但向量沿过 0 点的极值曲綫平行移动时,在特选标形上的分量为常数,故只要比較經过对称推移后所得之差卽可. 由(19),得知这差为

$$\omega^i(x, dx) - \omega^i(-x, dx) = \frac{1}{6} x^r x^l x^k (R_r{}^i{}_{kh} - A_r{}^i{}_s R_0{}^s{}_{kh})_{|l} dx^h + \cdots, \tag{22}$$

其中 $x^i = a^i s$, 因而得到結論:如果 $A_i{}^i{}_{k|l} = 0$ 向量經对称推移与經平行推移二者結果之差常为推移的測地距离 S 的三阶小量.

今証明此現象是与 $A_i{}^i{}_{k|l} = 0$ 分不开的,也卽欲証明:在区域 Ω 內,任一向量关于任一点 0 ($0 \in \Omega$) 的对称推移与平行推移所得結果之差为推移的路程 s 的三阶小量时,則在 Ω 中成立. 証之如下.

因問題中已假定在 Ω 內,关于任一点是可以作起对称推移的,故实际上,在区域內任一点可作起极座标的. 今按照关于任一固定的点 0 作特选綫素和特选标形. 則有

$$dM = \omega^i e_i, \quad de_l = \omega_l{}^j e_j, \quad de = \bar{\omega}^i e_i$$

及一套組織方程. 我們来研究 $\omega^i(x, dx)$, $\omega^i_j(x, dx)$, $\bar{\omega}^i(x, dx)$的展开式,写下

$$\omega^i_j(t, a, dt, da) = 0 + \bar{\omega}^i_j(t, a, da), \tag{23}$$

$$\bar{\omega}^i(t, a, dt, da) = 0 + \bar{\omega}^i(t, a, da), \tag{24}$$

$$\bar{\omega}^i(t, a, dt, da) = F^i(t, a)dt + \bar{\omega}^i(t, a, da). \tag{25}$$

前二式成立的理由显然,后一式是因为对任意的平行綫素列,极值曲綫的切綫方向不一定是平行方向,故它在特选标形上的分量必須为(t, a)的函数,代入組織方程,則得

$$\frac{\partial F^i}{\partial a^j}[da^j dt] + \left[dt \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t}\right] + d\bar{\omega}^i = [F^k dt + \bar{\omega}^k, \bar{\omega}^i_k] - A_k{}^i{}_h [F^k dt + \bar{\omega}^k, \bar{\omega}^h], \tag{26}$$

$$\left[dt, \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t}\right] + d\bar{\omega}^i = [\bar{\omega}^h \bar{\omega}^i_k] + \frac{1}{2} R_0{}^i{}_{kh}[F^k dt + \bar{\omega}^k, F^h dt + \bar{\omega}^h] + $$
$$+ P_0{}^i{}_{kh}[\bar{\omega}^k, F^h dt + \bar{\omega}^h] \tag{27}$$

$$\left[dt, \frac{\partial \bar{\omega}^i_j}{\partial t}\right] + d\bar{\omega}^i_j = [\bar{\omega}^k_j \bar{\omega}^i_k] + \frac{1}{2} S_j{}^i{}_{kh}[\bar{\omega}^k \bar{\omega}^h] + P_j{}^i{}_{kh}[\bar{\omega}^k, F^h dt + \bar{\omega}^h] + $$
$$+ \frac{1}{2} R_j{}^i{}_{kh}[F^k dt + \bar{\omega}^k, F^h dt + \bar{\omega}^h]. \tag{28}$$

比較(26)式中 dt 的系数,我們得到

$$\frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = \frac{\partial F^i}{\partial a^j} da^j + \bar{\omega}_k{}^i F^k - A_k{}^i{}_h F^k \bar{\omega}^h. \tag{29}$$

$t = 0$ 时, $\bar{\omega}^i = \bar{\omega}^i_j = \bar{\omega} = 0$ 对(29)再关于 t 导微一次,得

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}^i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F^i}{\partial a^j \partial t} da^j + \frac{\partial F^k}{\partial t} \bar{\omega}^i_k + F^k \frac{\partial \bar{\omega}^i_k}{\partial t} - \frac{\partial A_k{}^i{}_h}{\partial t} F^k \bar{\omega}^h - A_k{}^i{}_h \frac{\partial F^k}{\partial t} \bar{\omega}^h - A_k{}^i{}_h F^k \frac{\partial \bar{\omega}^h}{\partial t}. \tag{30}$$

于是在 $t = 0$ 时,得到

$$\bar{\omega}^i = 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = \frac{\partial F^i}{\partial a^j} da^j, \quad \frac{\partial^2 \bar{\omega}^i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F^i}{\partial a^j \partial t} da^j + \cdots \tag{31}$$

故

$$\overline{\omega}^i(t, a, da) = t\frac{\partial F}{\partial a^j}\bigg|_0 da^j + \frac{1}{2}t^2\frac{\partial^2 F^i}{\partial a^j \partial t}\bigg|_0 da^j + o(t^3),$$

即

$$\omega^i(t, a, dt, da) = F^i(a, t)dt + \overline{\omega}^i(t, a, da) =$$

$$= F^i(t, a)dt + t\frac{\partial F^i}{\partial a^j}\bigg|_0 da^j + \frac{1}{2}t^2\frac{\partial^2 F^i}{\partial a^j \partial t}\bigg|_0 da^j + o(t^3). \tag{32}$$

我們注意 ω^i 是 (x, dx) 的函数，而 $x^i = a^i t$，故上式中每項 t 的次数必須和 a 的次数及 da 的次数的总和相等，而当 $\omega^i(x, dx)$ 展成 x 的展开式时，$o(t^3)$ 里面的含 x 最低为二次，而 $t\frac{\partial F^i}{\partial a^j}\Big|_0 da^j$ 一項因它只含 t 一次，故与 da^j 組成含 dx^j 之項，所以含 x 一次的項只有从 $F^i(t, a)dt + \frac{1}{2}t^2\frac{\partial^2 F^i}{\partial a^j \partial t}\Big|_0 da^j$ 中去找，但我們要求作起 $\omega^i(x, dx) - \omega^i(-x, dx)$ 时，展开式自 (x^3) 項开始，而 $F^i(t, a)$ 不可能为零，就是它不包含 x，所以 $t\frac{2\partial^2 F^i}{\partial a^j \partial t}\Big|_0 da^j = 0$，但若 $\frac{\partial F^i}{\partial t}\Big|_0 \neq 0$ 则由于对不同类变数的偏导，可任意調动次序的，$\frac{\partial F^i}{\partial a^j} = 0$ 此是不可能的，因为当 $t = 0$ 时，$F^i = a^i$. 所以 $\frac{\partial F^i}{\partial t}\Big|_0 = 0$，今証：在任一条过 0 的极值曲綫上 $\frac{\partial F^i}{\partial t} = 0$ 为此在 Ω 中取 0 的隣近点 $0'$，它的綫素是取自 0 点的綫素沿此极值曲綫平行移动而得到的，标形也如此确定，然后再依据这組綫素标形作起关于 $0'$ 的特选綫素特选标形，但注意到在过 $0\,0'$ 的极值曲綫上前述的关于 0 点的特选綫素特选标形与現在的是一致的．故如果在二种极座标中取此极值曲綫为同样的方程式：$a^i = a_0^i$，則此刻的 $F'(t', a_0)$ 与前述的 $F(t, a)$ 只差一变換：$t' = t_0 + t$，t_0 是 $0'$ 在关于 0 的极座标中的 t_0（即 $0'$ 的座标是 $a_0^i t_0$）但与刚才所証的一样，有 $\frac{\partial F'^i(a_0 t')}{\partial t'}\Big|_0 = 0$ 即 $\frac{\partial F^i(a, t)}{\partial t}\Big|_{t_0} = 0$ 但 0 在 $a^i = a_0^i$ 的极值曲綫上是任取的，故 $\frac{\partial F^i(a_0, t)}{\partial t} = 0$，而 a_0 之值也可任取，因为不論对那一条过 0 的极值曲綫，均有上述結論的緣故．所以得到在 Ω 中成立

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = 0 \tag{33}$$

就是說，F^i 只与 a^i 有关，但 $t = 0$ 时，$F^i = a^i$ 所以 $F^i = a^i$，这就說明了 dM 在特选标下上的分量为常数，这里的 dM 是指极值曲綫上的移动（等长的微小移动），所以它是組成平行向量列的，因特选标形是相互平行之故．写出 dM 是平行的方程

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^{*}{}_j{}^i{}_k\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{34}$$

但因为我們特选綫素里的初綫素 l_0 完全任意，这与所取的特选綫素无关，故可知 $\Gamma^{*}{}_j{}^i{}_k$ 与 l 无关，也即 $A_j{}^i{}_{kl} = 0$ 綜合起来得到：

定理　欲使在一区域 Ω 中，任意一向量关于 0 点的对称推移与沿着过 0 的极值曲綫的平行推移后所得之差为三阶小量，充要条件是：在 Ω 中成立 $A_j{}^i{}_{kl} = 0$.

这个定理中的 0 点必須是任意的．这定理給出了具有 $A_j{}^i{}_{kl} = 0$ 的空間的一个几何

特征．我們称这样的芬斯拉空間为亚对称的芬斯拉空間，是很自然的．黎曼空間是这类空間的最常見的一种．

現在来考察嘉当的对称概念借以說明它与上述定理中的对称概念有着本質的联系．嘉当的对称是建立在过一定点的极值曲綫族上，我們試图把它扩充如次：設想通过定点 0 的一定曲綫族，它們滿布了 0 的近旁 Ω，并且在 Ω 中除了 0 点外，曲綫族中任二曲綫是不相交的，如此我們可以相似地依賴于极值曲綫族那样的来定义所謂极座标．当然，也可以相似地来定义点的对称变換和向量的对称推移．不妨称如此定义的对称概念为广义的对称．在广义的对称概念下，我們可以考察向量經过关于 0 的广义对称推移和沿着族中的一条曲綫平行推移所得之差之阶数，但是我們可有如下的定理：

定理　在广义对称推移的概念下，向量經过对称推移和沿着族中的一条曲綫平行推移所得結果之差为二阶小量时，此广义对称就是通常的嘉当对称，也就是說此时定义对称的曲綫族就是过 0 点的极值曲綫族．

証明是容易的．观察上定理的証明中的第二部分，我們可以完全不去記住我們的对称是嘉当的对称，自(23)起的計算——能破通过直至方程(34)，在說明了 $\Gamma^{*}{}_{j}{}^{i}{}_{k}$ 与 x' 无关后，它就是 $A_{i}{}^{j}{}_{k|l}=0$ 时的极值曲綫方程．故所論的曲綫族就是极值曲綫族．

由于这个証明，更給出了嘉当对称概念的特点——它是所有广义对称概念中最有价值的，要想扩充它的对称概念来建立新型的亚对称空間以及后面所談的对称空間是不可能的．同时由于这定理的証明也給出了 $A_{i}{}^{j}{}_{k|l}=0$ 的空間中过一定点 0 的极值曲綫族的特征：只有依賴于极值曲綫族所定义起来的对称概念才能使向量經过对称推移和平行推移之差为二阶小量．

§3. 对称空間　今研究向量經对称推移和經平行推移所得之差为四阶小量之情形，我們先在 $A_{i}{}^{j}{}_{k|l}=0$ 时考虑，然后得到一般的．先証一个重要的引理

引理　如 $A_{i}{}^{j}{}_{k|l}=0$ 則 $A_{i}{}^{j}{}_{r}R_{0}{}^{r}{}_{kh}=0$．

証：因 $A_{i}{}^{j}{}_{k|l}=0$，它在特选标形上的分量为絕对常数，故得

$$DA_{i}{}^{j}{}_{k}=A_{r}{}^{j}{}_{k}\omega_{i}^{r}+A_{i}{}^{j}{}_{r}\omega_{k}^{r}-A_{i}{}^{r}{}_{k}\omega_{r}^{j}=0, \tag{35}$$

取极座标，則 $\omega_{j}^{i}=\bar{\omega}_{j}{}^{i}$ 并把上式关于 t 求导一次，按(12)改写(35)

$$(A_{r}{}^{j}{}_{k}R_{i}{}^{r}{}_{lm}+A_{i}{}^{j}{}_{r}R_{k}{}^{r}{}_{lm}-A_{i}{}^{r}{}_{k}R_{r}{}^{j}{}_{lm})a^{l}\bar{\omega}^{m}=0, \tag{36}$$

与 l^{i} 相乘作和，則得

$$A_{r}{}^{j}{}_{k}R_{i}{}^{r}{}_{lm}a^{l}\bar{\omega}^{m}=0.$$

由于 a^{l}, $\bar{\omega}^{m}$ 是任意的，我們証明了引理．

現在开始討論阶数的問題．在 $A_{i}{}^{j}{}_{k|l}=0$ 时，利用上述引理，問題变为討論(22)的第一項即

$$x^{j}x^{k}x^{l}R_{j}{}^{i}{}_{kh|l}dx^{h}=0 \tag{37}$$

的情形，再由引理，此时 $R_{j}{}^{i}{}_{kh}$ 关于指标的一些关系式都同黎曼几何中一样了，即

$$\left.\begin{aligned}&R_{ijkh}=R_{khij}=R_{[ij]kh}=0\\&R_{ijkh}+R_{ikhj}+R_{ihjk}=0\\&R_{ijkh|l}+R_{ijhl|k}+R_{ijlk|h}=0\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

于是也同嘉当在黎曼几何中所做的那样，可利用标形的微小轉动来証明在 0 点必成立

$$R_{j\ k h|l}^{\ i} = 0 \tag{39}$$

故得

定理 若 $A_{j\ k|l}^{\ i} = 0$ 在 0 点的近旁 Ω 中成立，則为了任一向量关于 0 点的对称推移与平行推移所得之差要等于四阶小量，充要条件为：$R_{j\ kh|l}^{\ i} = 0$ 在 0 点成立.

注意：关于一定 0，把向量对称推移和平行推移后，其差为四阶小量；从这性質并不难推出 $A_{j\ k|l}^{\ i} = 0$，也就是說：我們的定理中的充要条件不能設为 $A_{j\ k|l}^{\ i} = 0$，$R_{j\ kh|l}^{\ i} = 0$，而把前提 $A_{j\ k|l}^{\ i} = 0$ 除去．但是如果联合以前所有定理，我們可有如下的結果：

定理 在一区域 Ω 內，要使向量关于 Ω 內任一点的对称推移与平行推移之差为四阶小量，充要条件为在 Ω 內成立

$$A_{j\ k|l}^{\ i} = 0, \quad R_{j\ kh|l}^{\ i} = 0. \tag{40}$$

在此时我們可作更进一步的考察，作

$$\left.\begin{aligned} \varpi^i(x, dx) - \varpi^i(-x, dx) &= \varpi^{*i}(x, dx), \\ \varpi^i_j(x, dx) - \varpi^i_j(-x, dx) &= \varpi^{*}{}_j{}^i(x, dx), \\ \bar{\varpi}^i(x, dx) - \bar{\varpi}^i(-x, dx) &= \bar{\varpi}^{*i}(x, dx). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

代入(12)，則得

$$\frac{\partial \varpi^{*i}}{\partial t} = a^k \varpi^{*i}_k - A_{k\ h}^{\ i} a^k \varpi^{*h},$$

$$\frac{\partial \bar{\varpi}^{*i}}{\partial t} = R_{0\ kh}^{\ i} a^k \varpi^{*h},$$

$$\frac{\partial \varpi^{*}{}_j{}^i}{\partial t} = R_{j\ kh}^{\ i} a^k \varpi^{*h}$$

当 $t = 0$ 时，$\varpi^{*i} = \bar{\varpi}^{*i} = \varpi^{*}{}_j{}^i = 0$ 又 $A_{j\ k}^{\ i}$，$R_{j\ kh}^{\ i}$，$R_{0\ kh}^{\ i}$ 在特选标形上为絕对常数，故由常微分方程組的唯一性定理可知：

$$\varpi^{*i} \equiv 0, \quad \varpi^{*}{}_j{}^i \equiv 0, \quad \bar{\varpi}^{*i} \equiv 0.$$

故可改写上列定理为如下方式：

定理 要使在一区域 Ω 內，向量关于任一点的对称推移严格的实現了沿过此点的极值曲綫的平行推移，充要条件为：在 Ω 中成立 $A_{j\ k|l}^{\ i} = 0$，$R_{j\ kh|l}^{\ i} = 0$.

称这种芬斯拉空間为对称的芬斯拉空間.

又 $\bar{\varpi}^{*i} \equiv 0$，表示了在对称芬斯拉空間中邻近綫素的关系是对称不变的.

关于对称和亚对称空間中的別的性質，将写另文討論.

参 考 文 献

[1] E. Cartan, Leçons sur la geometric des espaces de Riemann (1951).
[2] 苏步青：一般空間微分几何学講义(1957)，第一章．科学出版社.

ON THE SYMMETRIC PROPERTIES IN SOME FINSLER SPACES

SHING DING-KIA

(*Fu Tan University*)

ABSTRACT

In Riemannian space, E. Cartan had introduced the notions of symmetric transformation of points and symmetric transpose of vectors reference to a fixed point 0 along the geodesics passing through 0. Furthermore, he had calculated the difference between the parallel and symmetric transpose of a vector, by means of which, a special class of Riemannian spaces so called symmetric Riemannian space was defined in which the difference is an infinitesimal of order three, and many geometric properties was inserted. In this note, we give a direct extension of these results in Finsler spaces, and establish the following theorem:

THEOREM In order that the difference in question is an infinitesimal of order two in a rigion *D*, it is necessary and sufficient that the covariant derivatives of torsion tensor vanishes in the rigion *D*.

In this theorem, the family of geodesics in the definition of symmetric transpose cannot be replaced by any other family of curves, though we can give a more general definition of symmetric transpose of vectors independ on family of geodesics.

We call the space in theorem the subsymmetric Finsler space. By a simple calculation, the geometric definition of another special Finsler space——symmetric Finsler space with its tensor character was given.

第 9 卷 第 2 期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 2
1959 年 6 月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1959

富里埃級数的絕对收斂

謝庭藩
(杭州大学)

§ 1. 前言 設 $f(x)$ 是週期 2π 的可积的週期函数,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.1}$$

設

$$\Delta_h^{(l)} f(x) = \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} f(x + jh),$$

$$\omega_l(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_x |\Delta_h^{(l)} f(x)|.$$

С. Б. Стечкин[1] 曾經証明,当級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \omega_l\left(\frac{1}{k} \cdot f\right)$$

收斂时,級数 (1.1) 絕对收斂. 本文設 $f(x) \in L_p$, $1 < p \leqslant 2$, 研究級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^\beta + |b_n|^\beta) n^\gamma \tag{1.2}$$

的收斂性. 所得結果,包含着 Стечкин 的定理.

本文对于二重富里埃級数作出类似的研究. 所考虑的是:級数

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (|a_{m,n}|^\beta + |b_{m,n}|^\beta + |c_{m,n}|^\beta + |d_{m,n}|^\beta)(m+1)^\gamma (n+1)^{\gamma'} \tag{1.3}$$

的收斂性, 其中 $\beta > 0$, $\gamma \geqslant 0$, $\gamma' \geqslant 0$, $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ 是二元函数 $f(x, y)$ 的富里埃系数. 我們改进了一些关于二重富里埃級数絕对收斂已知的定理,特别是扩充了 В. Г. Челидзе[2] 及 И. Е. Жак[5] 的結果.

§ 2. 一元函数的富里埃級数 設 $N > 1$, $\delta > 0$; n 是一自然数,記

$$A_n^{(l)}(N, f)_p = \left\{ N^n \int_0^{2\pi} |\Delta_{\frac{\pi}{N^n}}^{(l)} f(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

$$\omega_l(\delta, f)_p = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} |\Delta_h^{(l)} f(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

引理 1. $\Delta_h^{(l)} e^{ikx} = e^{ikx}(e^{ikh} - 1)$.

証明 由定义, $\Delta_h^{(l)} e^{ikx}$ 等于

$$\sum_{i=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} e^{ik(x+jh)} = e^{ikx} \sum_{i=0}^{l} (-1)^l (-1)^j \binom{l}{j} e^{ikjh}.$$

所以引理 1 成立.

引理 2. 設 $f\in L_p$, $p\geqslant 1$, $1\leqslant l'<l$, 则

$$A_n^{(l)}(N,f)_p\leqslant 2^{l-l'}A_n^{(l')}(N,f)_p,$$

$$\omega_l(\delta,f)_p\leqslant 2^{l-l'}\omega_{l'}(\delta,f)_p.$$

証明 記着 $f(x)$ 的周期性，从

$$\Delta_h^{(l)}f(x)=\sum_{j=0}^{l-l'}(-1)^{l-l'-j}\binom{l-l'}{j}\Delta_h^{(l')}f(x+jh) \tag{2.1}$$

得到

$$\int_0^{2\pi}|\Delta_h^{(l')}f(x+jh)|^p\,dx=\int_0^{2\pi}|\Delta_h^{(l')}f(x)|^p\,dx.$$

由是

$$\left\{\int_0^{2\pi}|\Delta_h^{(l)}f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\leqslant\sum_{j=0}^{l-l'}\binom{l-l'}{j}\left\{\int_0^{2\pi}|\Delta_h^{(l')}f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

取 $h=\dfrac{\pi}{N^n}$, 两端乘以 $N^{n/p}$, 卽得

$$A_n^{(l)}(N,f)_p\leqslant 2^{l-l'}A_n^{(l')}(N,f)_p.$$

又从(2.1)得着

$$\omega_l(\delta,f)_p\leqslant 2^{l-l'}\omega_{l'}(\delta-f)_p. \tag{2.2}$$

定理 1. 設 $f(x)\in L_p\,(1<p\leqslant 2)$, 如果对于某一大于 1 的 N 及自然数 l, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n^{(l)}(N,f)_p\}^{\beta}N^{n(\gamma+1-\beta)}$$

收斂，其中 $\gamma\geqslant 0$, $0<\beta<\dfrac{p}{p-1}$, 那么級数 (1.2) 收斂.

証明 为方便起見，将 $f(x)$ 按直交函数系 $\{e^{ikx}\}$ 展开：

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx},$$

其中

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-ikx}\,dx,$$

从而

$$\Delta_{\frac{\pi}{N^n}}^{(l)}f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\Delta_{\frac{\pi}{N^n}}^{(l)}e^{ikx}.$$

由引理 1,

$$\Delta_{\frac{\pi}{N^n}}^{(l)}f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}\left(e^{ik\frac{\pi}{N^n}}-1\right)^l.$$

由于 $1<p\leqslant 2$, 所以从 Hausdorff-Young 的定理得到

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^q\left|e^{ik\frac{\pi}{N^n}}-1\right|^{lq}\right\}^{1/q}\leqslant A_n^{(l)}(N,f)_pN^{-\frac{n}{p}},$$

其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$. 又因

$$\left|e^{ik\frac{\pi}{N^n}}-1\right|=\left|2\sin\frac{k\pi}{2N^n}\right|,$$

$$\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1}|c_k|^q\left|2\sin\frac{k\pi}{2N^n}\right|^{lq}\geqslant\left(\sin\frac{\pi}{2N}\right)^{lq}\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1}|c_k|^q,$$

所以

$$\left\{\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1}|c_k|^q\right\}^{1/q}<KA_n^{(l)}(N,f)_pN^{-\frac{n}{p}},\tag{2.3}$$

其中K光和N有关系．用 Minkowski 不等式，

$$\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1}|c_k|^\beta k^\gamma\leqslant N^{n\gamma}\left\{\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1}|c_k|^q\right\}^{\frac{\beta}{q}}\left\{\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1}1\right\}^{1-\frac{\beta}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant N^{n(\gamma+1-\frac{\beta}{q})}\left\{\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1}|c_k|^q\right\}^{\frac{\beta}{q}}.\tag{2.4}$$

从(2.3)及(2.4)得到

$$\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1}|c_k|^\beta k^\gamma\leqslant K^\beta\{A_n^{(l)}(N,f)_p\}^\beta N^{n(\gamma+1-\beta)}\tag{2.5}$$

注意着

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^\beta k^\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1}|c_k|^\beta k^\gamma,$$

我們按照假定及(2.5)得出

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^\beta k^\gamma<+\infty.$$

这包含着(1.2)的收斂．証明完毕．

系 1． 如果 $f(x)$ 是有界变差函数，而且有自然数 l 使級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\omega_l(2^{-n},f)\}^{\frac{\beta}{2}}2^{n(\gamma+1-\beta)}\tag{2.6}$$

$$(\gamma\geqslant 0,\quad 0<\beta<2)$$

收斂，則級数(1.2)收斂．

証明 这时，$f(x)\in L_2$．从$f(x)$的周期性得

$$2^{n+1}\int_0^{2\pi}\left|f\left(x+\frac{\pi}{2^n}\right)-f(x)\right|dx=\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\int_0^{2\pi}\left|f\left(x+\frac{k\pi}{2^n}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{2^n}\right)\right|dx.$$

于是

$$2^{n+1}\int_0^{2\pi}\left|f\left(x+\frac{\pi}{2^n}\right)-f(x)\right|dx\leqslant 2\pi\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f),\quad n=1,2,3,\cdots.\tag{2.7}$$

因为

$$\Delta_{\frac{\pi}{2^n}}^{(l)} f(x) = \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{l-1-j} \binom{l-1}{j} \left\{ f\left(x + \frac{(j+1)\pi}{2^n}\right) - f\left(x + \frac{j\pi}{2^n}\right) \right\},$$

所以

$$\int_0^{2\pi} \left| \Delta_{\frac{\pi}{2^n}}^{(l)} f(x) \right| dx \leqslant \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{(j+1)\pi}{2^n}\right) - f\left(x + \frac{j\pi}{2^n}\right) \right| dx,$$

因此从(2.7)及 $f(x)$ 的周期性得出

$$\int_0^{2\pi} \left| \Delta_{\frac{\pi}{2^n}}^{(l)} f(x) \right| dx \leqslant 2^{l-1} 2^{-n-1} 2\pi \mathop{\mathrm{V}}_0^{2\pi}(f). \tag{2.8}$$

但是

$$\left| \Delta_{\frac{\pi}{2^n}}^{(l)} f(x) \right|^2 \leqslant \omega_l\left(\frac{\pi}{2^n}, f\right) \cdot \left| \Delta_{\frac{\pi}{2^n}}^{(l)} f(x) \right|,$$

所以由(2.8)得出

$$\int_0^{2\pi} \left| \Delta_{\frac{\pi}{2^n}}^{(l)} f(x) \right|^2 dx \leqslant \omega_l\left(\frac{\pi}{2^n}, f\right) 2^{l-n-1}\pi \mathop{\mathrm{V}}_0^{2\pi}(f).$$

即得

$$A_n^{(l)}(2, f)_2 \leqslant \sqrt{2^{l-1}\pi} \cdot \sqrt{\mathop{\mathrm{V}}_0^{2\pi}(f)} \cdot \sqrt{\omega_l\left(\frac{\pi}{2^n}, f\right)} = c_2 \sqrt{\omega_l\left(\frac{\pi}{2^n}, f\right)},$$

其中 c_2 与 n 无关.

这样一来，由(2.6)的收斂得出級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^{(l)}(2, f)_2\}^{\beta} 2^{n(\gamma+1-\beta)}$$

的收斂，所以从定理 1，級数(1.2)是收斂的.

于系 1 中置 $\beta = 1$, $\gamma = 0$, 所得結果是已知的.

于定理 1 中，置 $\beta = 1$, $\gamma = 0$, 就获得 В. Г. Челидзе 的定理[2].

只要我們注意到

$$A_n^{(l)}(N, f)_p \leqslant N^{\frac{n}{p}} \omega_l\left(\frac{\pi}{N^n}, f\right)_p,$$

$$\omega_l(\alpha\delta, f)_p \leqslant (\alpha+1)^l \omega_l(\delta, f)_p, \ (\alpha > 0)$$

及 $\omega_l(\delta, f)_p$ 的单調性和引理 2，便可得出許多熟知的結果(参見 [7], [8], [9]).

又易知 С. Б. Стечкин 定理是定理 1 的特例.

§ 2. 二元函数的富里埃級数 設 $f(x, y)$ 是关于每一个变数有周期 2π 的周期函数(下文把这句話省略)，且在 $R_0 = [0, 2\pi; 0, 2\pi]$ 上是可积的，記其富里埃級数为

$$f(x, y) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} A_{m,n}(x, y), \tag{3.1}$$

其中

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & m = n = 0; \\ \frac{1}{2} & m > 0 \neq 0 \text{ 或 } m = 0, \ n > 0; \\ 1 & m > 0, \ n > 0. \end{cases}$$

$$A_{m,n}(x,y)=a_{m,n}\cos mx\cos ny+b_{m,n}\sin mx\cos ny+$$
$$+c_{m,n}\cos mx\sin ny+d_{m,n}\sin mx\sin ny,$$

$a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}$ 是 $f(x,y)$ 的富里埃系数；例如

$$a_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\iint_{R_0} f(x,y)\cos mx\cos ny\,dx\,dy.$$

В. Г. Челидзе[2],[3] 及 И. Е. Жак[4] 研究了級数(3.1)的絕对收斂性，И. Е. Жак[5] 研究了級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(|a_{m,n}|+|b_{m,n}|+|c_{m,n}|+|d_{m,n}|)(m+1)^{\gamma}(n+1)^{\gamma'}$$

的收斂問題，不过他們的函数或是連續，或是平方可积的. И. Е. Жак—М. Ф. Тиман[6] 虽然在 $L_p(1<p\leqslant 2)$ 中考虑，然而必須假定函数滿足拓广了的 Lipschtz 条件. 我們研究更一般的級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(|a_{m,n}|^{\beta}+|b_{m,n}|^{\beta}+|c_{m,n}|^{\beta}+|d_{m,n}|^{\beta})(m+1)^{\gamma}(n+1)^{\gamma'},\tag{3.2}$$

并且只假設 $f(x,y)\in L_p$, $(1<p\leqslant 2)$.

函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dy \text{ 与 } \psi(y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dx\tag{3.3}$$

都是属于 L_p 的，他們的富里埃級数分别是

$$\varphi(x)\sim\frac{a_{0,0}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(a_{m,0}\cos mx+b_{m,0}\sin mx),$$
$$\psi(y)\sim\frac{a_{0,0}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{0,n}\cos ny+c_{0,n}\sin ny).$$

設

$$\triangle_{\xi,\eta}^{(t)}f(x,y)=\triangle_{\xi,\eta}^{(1)}(\triangle_{\xi,\eta}^{(t-1)}f(x,y)),$$
$$\triangle_{\xi,\eta}^{(1)}f(x,y)=f(x+\xi,y+\eta)-f(x+\xi,y)-f(x,y+\eta)+f(x,y).$$

称 $\triangle_{\xi,\eta}^{(t)}f(x,y)$ 为函数 $f(x,y)$ 的具有差距 ξ 及 η 的 t (t 是自然数)阶有限差.

当 $f(x,y)$ 是連續函数时，称

$$\omega_t(\delta_1,\delta_2,f)=\max_{|\xi|\leqslant\delta_1,|\eta|\leqslant\delta_2}\ \max_{x,y}|\triangle_{\xi,\eta}^{(t)}f(x,y)|$$

为 $f(x,y)$ 的 t 阶連續性模. 記

$$A_m^{(r)}(M',f)_p=\left\{M'^m\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}f\left(x+\frac{j\pi}{M'^m},y\right)dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}};$$

$$B_n^{(s)}(N',f)_p=\left\{N'^n\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\binom{s}{j}f\left(x,y+\frac{j\pi}{N'^n}\right)dx\right|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}};$$

$$C_{m,n}^{(t)}(M,N,f)_p=\left\{M^mN^m\iint_{R_0}|\triangle^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m},\frac{\pi}{N^n}}f(x,y)|^p\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

引理 3. 設 $G(x,y)=g_1(x)g_2(y)$，則

$$\Delta_{\xi,\eta}^{(t)} G(x, y) = \Delta_{\xi}^{(t)} g_1(x) \Delta_{\eta}^{(t)} g_2(y).$$

这是显然的.

引理 4. 設 $f(x, y) \in L_p$ ($p \geqslant 1$), t 和 t' 是自然数. 若 $t \geqslant t'$, 则

$$C_{m,n}^{(t)}(M, N, f)_p \leqslant 4^{t-t'} C_{m,n}^{(t')}(M, N, f)_p. \tag{3.4}$$

証明 当 $t \geqslant 2$ 时,

$$\Delta_{\xi,\eta}^{(t)} f(x, y) = \Delta_{\xi,\eta}^{(t-1)} f(x+\xi, y+\eta) - \Delta_{\xi,\eta}^{(t-1)} f(x+\xi, y) -$$
$$- \Delta_{\xi,\eta}^{(t-1)} f(x, y+\eta) + \Delta_{\xi,\eta}^{(t-1)} f(x, y). \tag{3.5}$$

由于 $f(x, y)$ 的周期性,

$$\iint_{R_0} |\Delta_{\xi,\eta}^{(t-1)} f(x+\xi', y+\eta')|^p \, dx\, dy = \iint_{R_0} |\Delta_{\xi,\eta}^{(t-1)} f(x, y)|^p \, dx\, dy.$$

所以应用 Minkowski 不等式于(3.5)得出

$$\left\{\iint_{R_0} |\Delta_{\xi,\eta}^{(t)} f(x, y)|^p \, dx\, dy\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant 4 \left\{\iint_{R_0} |\Delta_{\xi,\eta}^{(t-1)} f(x, y)|^p \, dx\, dy\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

因此,

$$C_{m,n}^{(t)}(M, N, f)_p \leqslant 4 C_{m,n}^{(t-1)}(M, N, f)_p.$$

如是継續进行, 即得(3.4)

从(3.5)可得

引理 5. 設 $t' \leqslant t$, 则

$$\omega_t(\delta_1, \delta_2, f) \leqslant 4^{t-t'} \omega_{t'}(\delta_1, \delta_2, f).$$

写着

$$\omega_t(\delta_1, \delta_2, f)_p = \sup_{|\xi| \leqslant \delta_1, |\eta| \leqslant \delta_2} \left\{\iint_{R_0} |\Delta_{\xi,\eta}^{(t)} f(x, y)|^p \, dx\, dy\right\}^{\frac{1}{p}},$$

从引理 5, 即得

$$\omega_t(\delta_1, \delta_2, f)_p \leqslant 4^{t-t'} \omega_{t'}(\delta_1, \delta_2, f)_p. \tag{3.6}$$

引理 6. 設 m, n 是两个自然数, 那末

$$\omega_t(m\delta_1, n\delta_2, f) \leqslant m^t n^t \omega_t(\delta_1, \delta_2, f). \tag{3.7}$$

証明 当 $t = 1$ 时,

$$\Delta_{m\xi,n\eta} f(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_{\xi,n\eta} f(x+k\xi, y) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\xi,\eta} f(x+k\xi, y+j\eta), \tag{3.8}$$

得到

$$|\Delta_{m\xi,n\eta} f(x, y)| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta_{\xi,\eta} f(x+k\xi, y+j\eta)|$$

从而(3.7)成立. 假如 $t > 1$, 那末利用(3.8)

$$\Delta_{m\xi,n\eta}^{(t)} f(x, y) = \Delta_{m\xi,n\eta}^{(1)} (\Delta_{m\xi,n\eta}^{(t-1)} f(x, y)) =$$
$$= \sum_{k_1=0}^{m-1}\sum_{j_1=0}^{n-1} \Delta_{\xi,\eta}^{(1)} (\Delta_{m\xi,n\eta}^{(t-1)} f(x+k_1\xi, y+j_1\eta)).$$

从而

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Delta^{(t)}_{m\xi,n\eta} f(x, y) = \\
&= \sum_{k_1=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} \Delta^{(1)}_{\xi,\eta} \sum_{k_2=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^{(1)}_{\xi,\eta} \cdots \sum_{k_{t-1}=0}^{m-1} \sum_{j_{t-1}=0}^{n-1} \Delta^{(1)}_{m\xi,n\eta} f(x + k_1\xi + \\
&+ k_2\xi + \cdots + k_{t-1}\xi,\ y + j_1\eta + j_2\eta + \cdots + j_{t-1}\eta) \\
&= \sum_{k_1=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} \Delta^{(1)}_{\xi,\eta} \sum_{k_2=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^{(1)}_{\xi,\eta} \cdots \sum_{k_{t-1}=0}^{m-1} \sum_{j_{t-1}=0}^{n-1} \Delta^{(1)}_{\xi,\eta} \Bigg(\sum_{k_t=0}^{m-1} \sum_{j_t=0}^{n-1} \Delta^{(1)}_{\xi,\eta} f(x + \\
&+ k_1\xi + k_2\xi + \cdots + k_t\xi,\ y + j_1\eta + j_2\eta + \cdots + j_t\eta) \Bigg) = \\
&= \sum_{k_1=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{m-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_t=0}^{m-1} \sum_{j_t=0}^{n-1} \{\Delta^{(t)}_{\xi,\eta} f(x + k_1\xi + k_2\xi + \cdots + k_t\xi, \\
&y + j_1\eta + j_2\eta + \cdots + j_t\eta)\},
\end{aligned}
\right\} \quad (3.9)
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&|\Delta^{t}_{m\xi,n\eta} f(x, y)| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k_1=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{m-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_t=0}^{m-1} \sum_{j_t=0}^{n-1} \{\Delta^{t}_{\xi,\eta} f(x + k_1\xi + \cdots + k_t\xi,\ y + j_1\eta + \cdots + j_t\eta)\},
\end{aligned}
$$

从 $f(x, y)$ 的周期性得到(3.7).

同样由(3.9)得出

$$\omega_t(m\delta_1, n\delta_2, f)_p \leqslant m^t n^t \omega_t(\delta_1, \delta_2, f)_p \quad (3.10)$$

系　設 $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, 則

$$\omega_t(\alpha_1\delta_1, \alpha_2\delta_2, f) \leqslant (\alpha_1 + 1)^t(\alpha_2 + 1)^t \omega_t(\delta_1, \delta_2, f); \quad (3.11)$$

$$\omega_t(\alpha_1\delta_1, \alpha_2\delta_2, f)_p \leqslant (\alpha_1 + 1)^t(\alpha_2 + 1)^t \omega_t(\delta_1, \delta_2, f)_p. \quad (3.12)$$

引理 7.　設 $f(x, y) \in L_p$, 記 $g(x, y) = f(-x, y)$

那末

$$C^{(t)}_{m,n}(M, N, f)_p = C^{(t)}_{m,n}(M, N, g)_p.$$

証明　从略.

系　設 $f \in L_p$, $g(x, y) = f(-x, y)$ 則

$$\omega_t(\delta_1, \delta_2, f)_p = \omega_t(\delta_1, \delta_2, g)_p. \quad (3.13)$$

定理 2.　如果存在一組大于 1 的数 M', N', M, N 及自然数 r, s, t, 使級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{A^{(r)}_m(M', f)_p\}^\beta M'^{m(\gamma+1-\beta)}, \quad (3.14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{B^{(s)}_n(N', f)_p\}^\beta N'^{n(\gamma'+1-\beta)}, \quad (3.15)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{C^{(t)}_{m,n}(M, N, f)\}^\beta M^{m(\gamma+1-\beta)} N^{n(\gamma'+1-\beta)} \quad (3.16)$$

都收斂，其中 $\gamma \geqslant 0$, $\gamma' \geqslant 0$, $0 < \beta < \dfrac{p}{p-1}$, $1 < p \leqslant 2$, 那末級数(3.2)收斂.

証明 函数

$$f^*(x, y) = f(x, y) - \varphi(x) - \psi(y) + \frac{a_{0,0}}{4}$$

的富里埃級数是

$$f^*(x, y) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}(x, y).$$

从 φ 和 ψ 的定义(3.3)知道

$$A_m^{(r)}(M, f)_p = \left\{M^m \int_0^{2\pi} \left|\sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} 2\pi\varphi\left(x + j\frac{\pi}{M^m}\right)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2\pi A_m^{(r)}(M, \varphi)_p;$$

$$B_n^{(s)}(N, f)_p = 2\pi A_n^{(s)}(N, \psi)_p.$$

因为級数(3.14)及(3.15)收斂，所以据定理 1，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{|a_{m,0}|^\beta + |b_{m,0}|^\beta\} (m+1)^\gamma, \tag{3.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{|a_{0,n}|^\beta + |c_{0,n}|^\beta\} (n+1)^{\gamma'} \tag{3.18}$$

都是收斂級数．現在証明級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{m,n}|^\beta + |b_{m,n}|^\beta + |c_{m,n}|^\beta + |d_{m,n}|^\beta)(m+1)^\gamma(n+1)^{\gamma'} \tag{3.19}$$

的收斂性．写着

$$f^*(x, y) \sim \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' C_{m,n}^* e^{i(mx+ny)},$$

$$C_{m,n}^* = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R_0} f^*(x, y)\, e^{-i(mx+ny)}\, dx\, dy.$$

Σ' 表示和号中不含有 $m = 0$ 或 $n = 0$ 的項．当 $mn \neq 0$ 时，

$$C_{m,n}^* = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R_0} f(x, y)\, e^{-i(mx+ny)}\, dx\, dy = \frac{1}{4}\{(a_{m,n} - d_{m,n}) - i(b_{m,n} + c_{m,n})\}.$$

由于

$$\Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}, \frac{\pi}{N^n}} f(x, y) = \Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}, \frac{\pi}{N^n}} f^*(x, y),$$

所以

$$\Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}, \frac{\pi}{N^n}} f^*(x, y) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' C_{j,k}^* \Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}, \frac{\pi}{N^n}} e^{i(jx+ky)}.$$

利用引理 3，

$$\Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}, \frac{\pi}{N^n}} f^*(x, y) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' C_{j,k}^* \Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}} e^{ijx} \Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{N^n}} e^{iky}.$$

从引理 1，

$$\Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}, \frac{\pi}{N^n}} f^*(x, y) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' C_{j,k}^* (e^{ij\frac{\pi}{M^m}} - 1)^t (e^{ik\frac{\pi}{N^n}} - 1)^t e^{i(jx+ky)}.$$

而后，再应用 Hausdorff-Young 定理的推广（参見[6]），得出

$$\left\{\iint_{R_0} \left|\Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}, \frac{\pi}{N^n}} f(x, y)\right|^p dx\, dy\right\}^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' |C^*_{j,k}|^q \left|e^{ij\frac{\pi}{M^m}}-1\right|^{tq} \left|e^{ik\frac{\pi}{N^n}}-1\right|^{tq}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

所以

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |C^*_{jk}|^q \left|\sin\frac{j\pi}{2M^m}\right|^{tq} \left|\sin\frac{k\pi}{2N^n}\right|^{tq}\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant C^{(t)}_{m,n}(M, N, f)_p M^{-\frac{m}{p}} N^{-\frac{n}{p}}.$$

于是

$$\left\{\sum_{j=M^{m-1}}^{M^m-1} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} |C^*_{j,k}|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant k C^{(t)}_{m,n}(M, N, f) M^{-\frac{m}{p}} N^{-\frac{n}{p}}. \tag{3.20}$$

其中 k 与 m, n 无关.

利用 Minkowski 不等式，我們得到

$$\sum_{j=M^{m-1}}^{M^m-1} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} |C^*_{j,k}|^\beta (j+1)^\gamma (k+1)^{\gamma'} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{j=M^{m-1}}^{M^m-1} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} |C^*_{j,k}|^q\right\}^{\frac{\beta}{q}} \left\{\sum_{j=M^{m-1}}^{M^m-1} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} 1\right\}^{1-\frac{\beta}{q}} M^{m\gamma} N^{n\gamma'} =$$

$$= \left\{\sum_{j=M^{m-1}}^{M^m-1} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} |C^*_{j,k}|^q\right\}^{\frac{\beta}{q}} M^{m(1+\gamma-\frac{\beta}{q})} N^{n(1+\gamma'-\frac{\beta}{q})}$$

因此及(3.20)得

$$\sum_{j=M^{m-1}}^{M^m-1} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} |C^*_{j,k}|^\beta (j+1)^\gamma (k+1)^{\gamma'} \leqslant k C^{(t)}_{m,n}(M, N, f)_p M^{m(\gamma+1-\beta)} N^{n(\gamma'+1-\beta)} \tag{3.21}$$

但是

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |C^*_{j,k}|^\beta (j+1)^\gamma (k+1)^{\gamma'} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\sum_{j=M^{m-1}}^{M^m-1} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} |C^*_{j,k}|^\beta (j+1)^\gamma (k+1)^{\gamma'}\right\}.$$

所以从(3.21)得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |C^*_{j,k}|^\beta (j+1)^\gamma (k+1)^{\gamma'} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C^{(t)}_{m,n}(M, N, f)_p M^{m(\gamma+1-\beta)} N^{n(\gamma'+1-\beta)}$$

由于級数(3.16)收斂，所以

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |C^*_{j,k}|^\beta (j+1)^\gamma (k+1)^{\gamma'} < +\infty$$

因此得到收斂級数

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_{j,k}-d_{j,k}|^{\beta}+|b_{jk}+c_{jk}|^{\beta})(j+1)^{\gamma}(k+1)^{\gamma'}. \tag{3.22}$$

为了証明(3.19)的收斂性,再引进一个輔助函数

$$g(x, y) = f^*(-x, y).$$

它的富里埃系数是

$$C_{m,n}^{**} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R_0} g(x, y)\, e^{-i(mx+ny)}\, dx\, dy = \frac{1}{4}\{(a_{m,n}+d_{m,n})+i(b_{m,n}-c_{m,n})\}.$$

据引理 7 及重复上述証明,就知道

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|C_{j,k}^{**}|^{\beta}(j+1)^{\gamma}(k+1)^{\gamma'} < +\infty$$

因此得到收斂級数

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_{j,k}+d_{j,k}|^{\beta}+|b_{j,k}-c_{j,k}|^{\beta})(j+1)^{\gamma}(k+1)^{\gamma'}. \tag{3.23}$$

由級数(3.22)及(3.23)的收斂性,知道級数(3.19)收斂. 定理 2 証明完毕.

系 級数

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_{m,n}|^{\beta}(m+1)^{\gamma}(n+1)^{\gamma'}$$

在定理 2 的条件下收斂,此地

$$C_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R_0} f(x, y)\, e^{-i(mx+ny)}\, dx\, dy.$$

下述 B. Г. Челидзе 定理是定理 2 的特別情形:如果对于某一对 $M, N(>1)$, 級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(1)}(M, f)_2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)}(N, f)_2,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}^{(1)}(M, N, f)_2$$

收斂,則 $f(x, y)$ 的富里埃級数絕对收斂.

对于任何分法

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 2\pi,$$
$$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 2\pi,$$

和数

$$\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_j, y_k) - f(x_j, y_{k+1}) - f(x_{j+1}, y_k) + f(x_{j+1}, y_{k+1})|$$

的上界是有限数时, 那末說 $f(x, y)$ 在 $R_0 = [0, 2\pi; 0, 2\pi]$ 上在 Vitali 意义下, 是有界变差.

当 $f \in L_2$ 时,类似于引理 4 可以証得

$$\iint_{R_0} \left| \Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}, \frac{\pi}{N^n}} f(x, y) \right|^2 dx\, dy \leqslant \omega_t\left(\frac{\pi}{2^m}, \frac{\pi}{2^n}, f\right) \iint_{R_0} \left| \Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{2^m}, \frac{\pi}{2^n}} f(x, y) \right| dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \omega_t\left(\frac{\pi}{2^m}, \frac{\pi}{2^n}, f\right) 4^{t-1} \iint_{R_0} \left| \Delta^{(1)}_{\frac{\pi}{2^m}, \frac{\pi}{2^n}} f(x, y) \right| dx\, dy.$$

对于任何自然数 m，n 成立着不等式

$$\frac{1}{4\pi^2} 2^{m+n+2} \iint_{R_0} \left| \Delta^{(1)}_{\frac{\pi}{2^m}, \frac{\pi}{2^n}} f(x, y) \right| dx\, dy \leqslant V(f, R_0),$$

其中 $V(f, R_0)$ 表示 $f(x, y)$ 在 R_0 上的全变差.

由上述二式，得到

$$C^{(t)}_{m,n}(2, 2, f)_2 \leqslant k \sqrt{\omega_t\left(\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}, f\right)},$$

其中

$$k = 4^{\frac{t-1}{2}} \pi \sqrt{V(f, R_0)}.$$

由是从定理 2 得出

定理 3　設 $f(x, y)$ 是平方可积函数，且在 Vitali 意义下为有界变差．如果对某一組自然数 r, s, t，級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{A^{(r)}_m(2, f)_2\}^{\beta} 2^{m(\gamma+1-\beta)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{B^{(s)}_n(2, f)_2\}^{\beta} 2^{n(\gamma'+1-\beta)},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\omega_t\left(\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}, f\right)\right\}^{\frac{\beta}{2}} 2^{m(\gamma+1-\beta)} 2^{n(\gamma'+1-\beta)}$$

都收斂，其中 $\gamma \geqslant 0$，$\gamma' \geqslant 0$，$0 < \beta < 2$，那末級数(3.2)收斂.

如果 $f(x, y)$ 是在 Vitali 意义下有界变差，对于每个固定的 x，$f(x, y)$ 是 y 的有界变差函数，对每个固定的 y，$f(x, y)$ 是 x 的有界变差函数，則說 $f(x, y)$ 是在 Hardy 意义下有界变差．相应記其全变差为 $\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}_x(f)$，$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}_y(f)$，則

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}_x(f) \tag{3.24}$$

和

$$\sup_{0 \leqslant y \leqslant 2\pi} \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}_y(f) \tag{3.25}$$

都小于常数 C，写着

$$\omega^{*}_r(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \sup_{x} \left| \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + jh, y)\, dy \right|,$$

$$\omega^{**}_r(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \sup_{y} \left| \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{s-j} \binom{s}{j} f(x, y + jh)\, dx \right|.$$

那末，从定理 1 及定理 3 得到

定理 4' 設 $f(x, y)$ 是在 Hardy 意义下有界变差函数，如果对于某一組自然数 r, s, t，級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\omega_r^*\left(\frac{1}{2^m}, f\right)\right\}^{\frac{\beta}{2}} 2^{m(\gamma+1-\beta)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\omega_s^{**}\left(\frac{1}{2^n}, f\right)\right\}^{\frac{\beta}{2}} 2^{n(\gamma'+1-\beta)},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\omega_t\left(\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}, f\right)\right\}^{\frac{\beta}{2}} 2^{m(\gamma+1-\beta)}\, 2^{n(\gamma'+1-\beta)}$$

都收斂，其中 $\gamma > 0$, $\gamma' > 0$, $0 < \beta < 2$，則級数(3.2)收斂。

事实上，由(3.24)，(3.25)得出由(3.3)所定义的函数 $\varphi(x)$, $\psi(y)$ 是有界变差的，而且

$$\omega_r(\delta, \varphi) = \omega_r^*(\delta, f),$$
$$\omega_s(\delta, \psi) = \omega_s^{**}(\delta, f).$$

余下的証明是不难类似于前述写出的。

当 $r = s = t = 1$ 时，定理 2 便含有 B. Г. Челидзе[2] 的結果，当 $\beta = 1$ 时，定理 4 含有 И. Е. Жак 定理[3]，Жак 假設 $f(x, y)$ 是 Hardy 意义下之有界变差函数（虽然他不是这样写，而事实上却是如此），而且

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leqslant C_1(y)|x_2 - x_1|^{\alpha'},$$
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant C_2(x)|y_2 - y_1|^{\beta'},$$
$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)| \leqslant C|x_2 - x_1|^{\alpha^*}|y_2 - y_1|^{\beta^*},$$

$C_1(y)$, $C_2(x)$ 是非負的可积分函数，那末級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(|a_{m,n}| + |b_{m,n}| + |c_{m,n}| + |d_{m,n}|)(m+1)^{\gamma}(n+1)^{\gamma'} \tag{3.26}$$

收斂，其中 $\gamma < \frac{1}{2}\min(\alpha^*, \alpha')$, $\gamma' < \frac{1}{2}\min(\beta^*, \beta')$。

事实上，在 Жак 的假定下

$$\omega_r^*\left(\frac{1}{2^m}, f\right) \leqslant C_1 2^{r-1} 2^{-m\alpha'}$$

$$\omega_s^{**}\left(\frac{1}{2^n}, f\right) \leqslant C_2 2^{s-1} 2^{-n\beta'},$$

$$\omega_t\left(\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}, f\right) \leqslant C 4^{t-1} 2^{-m\alpha^*} 2^{-n\beta^*}.$$

所以对于任何自然数 r, s, t，当

$$\gamma < \frac{1}{2}\min(\alpha^*, \alpha') \quad \gamma' < \frac{1}{2}\min(\beta^*, \beta')$$

时，級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\{\omega_r^*(2^{-m}, f)\}^{\frac{1}{2}} 2^{m\gamma},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\omega_s^{**}(2^{-n}, f)\}^{\frac{1}{2}} 2^{n\gamma'},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{\omega_t(2^{-m}, 2^{-n}, f)\}^{\frac{1}{2}} 2^{m\gamma} 2^{n\gamma'}$$

都收斂，从而級数(3.26)收斂.

参 考 文 献

[1] С. Б. Стечкин, Об абсолютности сходимости рядов фурье (Второе сообщение). *Изв. АН СССР Сер. Матем.*, 19 (1955).

[2] В. Г. Челидзе, Об абсолютной сходимости рядов фурье (手稿) (1958).

[3] В. Г. Челидзе, Об абсолютной сходимости двойных рядов фурье. *ДАН СССР*, т. 54 (1946).

[4] И. Е. Жак, Об обобщении одной теоремы В. Г. Челидзе. *Сообщ. АН Груз. ССР*, т. 16 (1955).

[5] И. Е. Жак, К абсолютной сходимости двойных рядов фурье. *Сообщ. АН Груз. ССР*, т. 12 (1951).

[6] И. Е. Жак и М. Ф. Тиман, О суммировании двойных рядов. *Матем. Сб.*, 35(77) (1954).

[7] A. Zygmund, Trigonometrical series. (1952).

[8] A. Zygmund, Sur la convergence absolue des séries de Fourier. *Journal of the London Math. Soc.*, 3 (1928).

[9] O. Szasz, Über den Kongvergenzexponent der Fourierschen Reinen. Münchener Sitzungsherchte (1922).

ОБ АБСОЛЮТНОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Ше Дин-фан

(*Хань-Чау Университет*)

Резюме

Пусть $f(x, y)$—суммируемая функция, и $a_{m.n}$ $b_{m.n}$ $c_{m.n}$ $d_{m.n}$ являются коэффициентами фурье функции $f(x, y)$. В этой работе, мы рассмотрим вопрос о сходимости ряда следующего вида:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(|a_{m.n}|^{\beta} + |b_{m.n}|^{\beta} + |c_{m.n}|^{\beta} + |d_{m.n}|^{\beta})(m+1)^{\gamma}(n+1)^{\gamma'}. \quad (1)$$

Положим

$$\Delta_{\xi,\eta}^{(t)} f(x, y) = \Delta_{\xi,\eta}^{(1)} (\Delta_{\xi,\eta}^{(t-1)} f(x, y)),$$

$$\Delta_{\xi,\eta}^{(1)} f(x, y) = f(x+\xi, y+\eta) - f(x+\xi, y) - f(x, y+\eta) + f(x,y).$$

$\Delta_{\xi,\eta}^{(t)} f(x, y)$ называется конечной разонстью t — го порядка с шагами ξ,η; а

$$\omega_t(\delta_1, \delta_2, f) = \max_{|\xi|\le\delta_1, |\eta|\le\delta_2} \max_{x,y} |\Delta_{\xi,\eta}^{(t)} f(x, y)|,$$

называется модулем непрерывности t — го порядка.

Пусть $f(x, y)\in L_p$, положим

$$A_m^{(r)}(M', f)_p = \left\{M'^m \int_0^{2\pi} \left|\int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f\left(x + i\frac{\pi}{M'^m}, y\right) dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$B_n^{(s)}(N', f)_p = \left\{ N'^n \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{s-j} \binom{s}{j} f\left(x, y + j\frac{\pi}{N'^n}\right) dx \right|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$c_{m,n}^{(t)}(M, N, f)_p = \left\{ M^m N^n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Delta^{(t)}_{\frac{\pi}{M^m}, \frac{\pi}{N^n}} f(x, y) \right|^p dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

На основании полученных нами свойств функций $\Delta^{(t)}_{\xi,\eta}$, $A^{(r)}_m$, $\cdots$, мы получили критерий сходимости ряда (1).

Теорема 2 Если $f(x, y) \in L_p$, $(1 < p \leqslant 2)$ есть периодическая функция относительно каждого переменого, и существует система чисел $M' > 1, N' > 1, M > 1, N > 1$, и натуральные числа r, s, t такие, что ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{A_m^{(r)}(M', f)_p\}^{\beta} M'^{m(\gamma+1-\beta)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{B_n^{(s)}(N', f)_p\}^{\beta} N'^{n(\gamma'+1-\beta)},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{C_{m,n}^{(t)}(M, N, f)\}^{\beta} M^{m(\gamma+1-\beta)} N^{n(\gamma'+1-\beta)}$$

сходится, где $\gamma \geqslant 0$, $\gamma' \geqslant 0$, $0 < \beta < \dfrac{p}{p-1}$, то ряд (1) сходится.

Положим

$$\omega_r^*(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \sup_x \left| \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + jh, y)\, dy \right|,$$

$$\omega_s^{**}(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \sup_y \left| \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{s} (-1)^{s-i} \binom{s}{i} f(x, y + jh)\, dx \right|.$$

Теорема 4 Пусть $f(x, y)$ есть периодическая функция относительно каждой переменой и с конечными в смысле Hardy. Если для каких-нибудь натуральных чисел r, s, t, ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{\omega_r^*(2^{-m}, f)\}^{\frac{\beta}{2}} 2^{m(\gamma+1-\beta)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\omega_s^{**}(2^{-n}, f)\}^{\frac{\beta}{2}} 2^{n(\gamma'+1-\beta)}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{\omega_t(2^{-m}, 2^{-n}, f)\}^{\frac{\beta}{2}} 2^{m(\gamma+1-\beta)} 2^{n(\gamma'+1-\beta)}$$

сходится, где $\gamma \geqslant 0$, $\gamma' \geqslant 0$, $0 < \beta < 2$, то ряд (1) сходится.

第9卷 第2期 数学学报 Vol. 9, No. 2
1959年6月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1959

在平衡点附近 $\frac{dx}{dt}=P,\ \frac{dy}{dt}=Q$ 出現三个极限环的例子（P, Q 为二次多項式）

秦元勳等
（中国科学院数学研究所）

§1. 問題的提出

И. Г. Петровский 院士曾經証明[1]方程 $\frac{dx}{dt}=P,\ \frac{dy}{dt}=Q$，其中 P, Q 是关于 x, y 的二次多項式，在全平面至多能出現三个极限环綫. Н. Н. Баутин 在[2]中証明在焦点和中心型的平衡点附近，如果变动方程的係数可能出現三个极限环綫，但至今还不見有出現三个极限环的实际例子. 用 Баутин 用以証明可能性的无穷級数方法要作出一个具体的方程实际上存在着不可克服的困难. 本文利用 Баутин 的理論，結合 M. Frömmer[3] 的求无切环綫的方法发展出一套計算法，由它作出了出現三个极限环綫的具体方程. 最后利用方向場的旋轉又得出在平面上有且仅有两个极限环的例子.

§2. 解决問題的方法

我們用一个例子来說明本文所用的計算方法. 这个例子是 M. Frömmer 在[3]中提出的. 方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+(1+\varepsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2} \qquad (F_2)$$

当 ε 充分小时在原点附近至少出現一个极限环綫. 但 Frömmer 并未指出 ε 的具体大小. 我們要証明取 $\varepsilon=-\frac{7}{15}10^{-21}$ 即可.

先介紹 Frömmer 求无切环綫的方法. 考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=y+P_2(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt}=-x-Q_2(x,y),$$

其中 P_2, Q_2 是关于 x, y 的二次齐次多項式. 設

$$F(x,y)=x^2+y^2+f_3(x,y)+f_4(x,y)+f_5(x,y)+f_6(x,y)+\cdots,$$

其中 $f_i(x,y)$ 是关于 x, y 的 i 次齐次多項式. 求 F 用 (F_2) 作成的对 t 的导数

$$\frac{dF}{dt}=\left(2x+\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_4}{\partial x}+\cdots\right)(y+P_2)-\left(2y+\frac{\partial f_3}{\partial y}+\frac{\partial f_4}{\partial y}+\cdots\right)(x+Q_2)=$$

$$=\left(y\frac{\partial f_3}{\partial x}-x\frac{\partial f_3}{\partial y}+2xP_2-2yQ_2\right)+\left(y\frac{\partial f_4}{\partial x}-x\frac{\partial f_4}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial x}P_2-\frac{\partial f_3}{\partial y}Q_2\right)+$$

$$+\left(y\frac{\partial f_5}{\partial x}-x\frac{\partial f_5}{\partial y}+\frac{\partial f_4}{\partial x}P_2-\frac{\partial f_4}{\partial y}Q_2\right)+\left(y\frac{\partial f_6}{\partial x}-x\frac{\partial f_6}{\partial y}+\frac{\partial f_5}{\partial x}P_2-\frac{\partial f_5}{\partial y}Q_2\right)+\cdots.$$

选择适当的 $f_3 f_4$ 使得

$$y\frac{\partial f_3}{\partial x}-x\frac{\partial f_3}{\partial y}+2xP_2-2yQ_2=0$$

$$y\frac{\partial f_4}{\partial x}-x\frac{\partial f_4}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial x}P_2-\frac{\partial f_3}{\partial y}Q_2=D_1(x^4+y^4).$$

如果 $D_1\neq 0$，则可取无切触环綫为

$$F(x,y)=x^2+y^2+f_3(x,y)+f_4(x,y)=\text{const}.$$

如果 $D_1=0$，则选择适当的 f_5, f_6 使得

$$y\frac{\partial f_5}{\partial x}-x\frac{\partial f_5}{\partial y}+\frac{\partial f_4}{\partial x}P_2-\frac{\partial f_4}{\partial y}Q_2=0,$$

$$y\frac{\partial f_6}{\partial x}-x\frac{\partial f_6}{\partial y}+\frac{\partial f_5}{\partial x}P_2-\frac{\partial f_4}{\partial y}Q_2=D_2(x^6+y^6).$$

如果 $D_2\neq 0$，无切环綫可取为

$$F(x,y)=x^2+y^2+f_3+f_4+f_5+f_6.$$

如果 $D_2=0$，则还要継續作下去以求得 $D_3, D_4, \cdots$. D_i 按 Frömmer 称为第 i 个焦点量.

用上述方法可求出 (F_2) 中当 $\varepsilon=0$ 时方程的无切环綫

$$F_1(x,y)=(x^2+y^2)+\left(\frac{2}{3}x^3-2x^2y^2-\frac{2}{3}y^3\right)+(y^4+4xy^3)+$$

$$+\left(-\frac{8}{15}x^5-\frac{4}{3}x^3y^2-4x^2y^3-8xy^4\right)+$$

$$+\left(-\frac{116}{18}x^6+\frac{14}{15}x^5y-\frac{184}{12}x^4y^2+\frac{58}{9}x^3y^3+\frac{286}{15}xy^5\right)=10^{-9},$$

对于 (F_2) 的无切环綫可求出得

$$F_2(x,y)=x^2+y^2+\left(\frac{2+2\varepsilon}{3}x^3-2xy^2-\frac{2}{3}y^3\right)+$$

$$+\left(y^4+\left(4+\frac{2}{3}\varepsilon\right)xy^3-\frac{2}{3}\varepsilon x^3y\right)=10^{-51}.$$

我們要証明 $F_1(x,y)=10^{-9}$ 及 $F_2(x,y)=10^{-51}$ 当 ε 取 $-\frac{7}{15}10^{-21}$ 时都是 (F_2) 的无切环綫，实际上有

$$\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=10^{-9}}<0,\qquad \left.\frac{dF_2}{dt}\right|_{F_2=10^{-51}}>0.$$

因此如果 $F_1=10^{-9}$ 与 $F_2=10^{-51}$ 之間沒有奇点，则在它們之間至少有一条极限环綫.

先証明 $F_1=10^{-9}$ 在原点附近有一条实的单閉分支，实际上可証在 $r=10^{-4}$ 之圓內如此，$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$$F_1(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2[1 + \Phi_1(r,\theta)],$$
$$|\Phi_1(r,\theta)| \leqslant 10^2(1 + r + r^2 + r^3),$$
$$F_1 \geqslant r^2[1 - 10^2 r(1 + r + r^2 + r^3)],$$

故对于任意 θ 及 $r = 10^{-4}$

$$F_1(10^{-4}\cos\theta, 10^{-4}\sin\theta) \geqslant 10^{-8}[1 - 10^{-6}(1 + 10^{-4} + 10^{-8} + 10^{-12})] > 10^{-9}$$

又

$$F_1(0, 0) = 0,$$

故 $F_1(x, y) = 10^{-9}$ 对于任意的 θ 至少有一个解 r，$0 < r < 10^{-4}$. 其次可証明 r 是唯一的.

对同一 θ, $10^{-4} > r_1 > r_2 \geqslant 0$

$$F_1(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta) - F_1(r_2\cos\theta, r_2\sin\theta) = (r_1 - r_2)\varphi_2(r_1, r_2, \theta).$$

$$\begin{aligned}|\varphi_2(r_1, r_2, \theta)| &\geqslant (r_1 + r_2) - 50(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2 + r_1^3 + r_1^2r_2 + r_1r_2^2 + r_2^3 + r_1^4 + \\ &\quad + r_1^3r_2 + r_1^2r_2^2 + r_1r_2^3 + r_2^4 + r_1^5 + r_1^4r_2 + r_1^3r_2^2 + r_1^2r_2^3 + r_1r_2^4 + r_2^5 \\ &\geqslant (r_1 + r_2) - 10^3r_1^2 \\ &= r_1(1 - 10^3r_1) + r_2 > r_1\left(1 - \frac{1}{10}\right) + r_2 > 0.\end{aligned}$$

故解 r 在 $0 < r < 10^{-4}$ 中是唯一的，故 $F_1 = 10^{-9}$ 有单閉实分支.

再来証明它对于 $(F)_2$ 是无切点环綫. 即要証明

$$\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=10^{-9}} < 0.$$

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$= -\frac{14}{15}(x^6 + y^6) + \varepsilon_0\varphi_3(x, y)$$

其中

$$\begin{aligned}\varphi_3(x,y) &= -x^2\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ &= -x^2\Big[2y - 4xy - 2y^2 + 4y^3 + 12xy^2 - \frac{8}{3}x^3y - 12x^2y^2 - \\ &\quad - 32xy^3 - 12y^4 + \frac{14}{15}x^5 - \frac{184}{6}x^4y + \frac{58}{3}x^3y^2 + \frac{286}{3}xy^4\Big],\end{aligned}$$

当 $r < 10^{-4}$ 时有

$$|\varphi_3| \leqslant 250r^3 = \frac{1}{4}(10r)^3.$$

在 $F_1 = 10^{-9}$ 上的点 (x, y)，$r^2 = x^2 + y^2$，有

$$r^2[1 - 10^2(r + r^2 + r^3 + r^4)] \leqslant F_1 = 10^{-9} \leqslant r^2[1 + 10^2(r + r^2 + r^3 + r^4)]$$

故有

$$10^{-5} \leqslant r < 10^{-4}.$$

又

$$\frac{r^6}{4} = 2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^6 \leqslant x^6 + y^6 \leqslant (x^2 + y^2)^3 = r^6,$$

故在 $F_1 = 10^{-9}$ 上有

$$\frac{10^{-30}}{4} \leqslant x^6 + y^6 \leqslant 10^{-24},$$

在 $F = 10^{-9}$ 上有

$$-\frac{10^{-9}}{4} \leqslant \phi_3 \leqslant \frac{10^{-9}}{4},$$

故

$$\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=10^{-9}} = \left[-\frac{14}{15}(x^6+y^6) + \varepsilon\varphi_3(x, y)\right]_{F_1=10^{-9}}$$
$$\leqslant -\frac{14}{15}\frac{10^{-30}}{4} + \left(-\frac{7}{15}10^{-21}\right)\left(\frac{-10^{-9}}{4}\right)$$
$$= -\frac{7}{15}\frac{10^{-30}}{4} < 0.$$

同样我們可以証明 $F_2 = 10^{-51}$ 在原点附近卽 $r = \frac{7}{45}10^{-23}$ 的圓內有一条单閉的实分支，因在此圓上

$$F_2 \geqslant r^2(1 - 10r) \geqslant \left(\frac{7}{45}10^{-23}\right)^2\left(1 - 10\cdot\frac{7}{45}10^{-23}\right)$$
$$\geqslant \left(\frac{7}{45}\right)^2 10^{-46}\frac{9}{10} > 10^{-51},$$

$$F(0, 0) = 0,$$

故对任意的 θ, r 有解，还可証明解是唯一的.

如果 $\frac{7}{45}10^{-23} > r_1 > r_2 > 0$，則

$$F_2(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta) - F_2(r_2\cos\theta, r_2\sin\theta)$$
$$= (r_1 - r_2)[r_1 + r_2 + \varphi_6(r_1, r_2, \theta)],$$
$$|\varphi_6| \leqslant 11r_1^2,$$

故

$$\left|\frac{F_2(r_1) - F_2(r_2)}{r_1 - r_2}\right| \geqslant r_1(1 - 11r_1) + r_2 > 0.$$

下面来証明此实分支是无切环綫，卽要証明

$$\left.\frac{dF_2}{dt}\right|_{F_2=10^{-51}} > 0.$$

实际上，

$$\frac{dF_2}{dt} = -\frac{2}{3}\varepsilon(x^4 + y^4) + \varphi_4(x, y),$$

其中

$$\varphi_4(x, y) = -\frac{2}{3}\varepsilon(1+\varepsilon)x^5 - \frac{4}{3}\varepsilon x^4 y + \left(12 + 10\frac{2}{3}\varepsilon + 2\varepsilon^2\right)x^3y^2 +$$
$$+ (28 + 10\varepsilon)x^2y^3 + \left(4 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)xy^4 + \left(-8 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)y^5,$$

故

$$|\varphi_4| \leqslant 100r^5.$$

又

$$\frac{r^4}{2} = 2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^4 \leqslant x^4 + y^4 \leqslant (x^2 + y^2)^2 = r^4,$$

在　$F_2 = 10^{-51}$ 上面

$$r^2(1 - 10r) \leqslant F_2 = 10^{-51} \leqslant r^2(1 + 10r),$$

故　$10^{-26} \leqslant r \leqslant 10^{-25}$. 因此

$$\left.\frac{dF_2}{dt}\right|_{F_2=10^{-51}} = -\frac{2}{3}\varepsilon(x^4 + y^4) + \varphi_4(x,y) \geqslant -\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{15}10^{-21}\right)\frac{1}{2}(10^{-25})^4 - 50(10^{-25})^5 =$$

$$= (10^{-25})^4\left[\frac{7}{45}10^{-21} - 100(10)^{-25}\right] =$$

$$= (10^{-25})^4(10^{-21})\left(\frac{7}{45} - \frac{1}{100}\right) > 0.$$

余下还要証明 $F_1 = 10^{-9}$ 与 $F_2 = 10^{-51}$ 之間沒有奇点，实际上只須要証明在 $r = 10^{-4}$ 之內除原点外 (F_2) 沒有其它的奇点即可. (F_2) 的奇点即联立方程

$$\begin{cases} x + (1 + \varepsilon)x^2 + 2xy - y^2 = 0, \\ y - 2xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

的解. 相应于 $y = 0$, $x = 0$ 及 $x = -\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{2}$; 相应于 $y = 2x - 1$,

$$x = \frac{-3 - \sqrt{9 + 4(1 + \varepsilon)}}{2(1 + \varepsilon)} \approx -3.25$$

及

$$x = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4(1 + \varepsilon)}}{2(1 + \varepsilon)} \approx 0.25.$$

它們都在　$r = 10^{-4}$ 之外.

§3. 出现三个极限环的例子

設微分方程是

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + 2xy - y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x + x^2 - 5xy - y^2 \end{aligned} \qquad (A_2)$$

它与方程

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2$$

比較[2]，得

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_5 = 0 \\ \lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6 = 0 \\ \frac{25}{32}\pi\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2) > 0. \end{cases}$$

如果依次变动 (A_2) 的係数 $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_1$，得方程

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y + (2+\delta)xy - y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \lambda y + x^2 - (5+\epsilon)xy - y^2 \qquad (B_2)$$

当 $\epsilon = -10^{-78}$，$\delta = -10^{-350}$，$\lambda = 10^{-820}$ 时 (B_2) 在 $x = y = 0$ 附近出現三个极限环綫.

現在来証明

$$F_1 = f_{12} + f_{22} + f_{32} + f_{42} + f_{52} + f_{62} + f_{72} + f_{82} = 10^{-29}.$$

其中

$$f_{12} = x^2 + y^2,$$

$$f_{13} = \frac{2}{3}x^3 - 2xy^2 + 4y^3,$$

$$f_{14} = -10xy^3 + 15y^4,$$

$$f_{15} = \frac{4}{3}x^5 + \frac{10}{3}x^3y^2 + 10x^2y^3 - 50xy^4 + 62y^5,$$

$$f_{17} = -\frac{1532}{21}x^7 - \frac{736}{3}x^5y^2 - \frac{110}{3}x^4y^3 - \frac{1060}{3}x^3y^4 + \frac{1552}{3}x^2y^5 - \\ - \frac{3775}{3}xy^6 + \frac{8028}{7}y^7,$$

$$f_{18} = -\frac{13499}{14}x^7y + 756x^6y^2 + \frac{28201}{6}x^5y^3 + \frac{4181}{2}x^4y^4 + \frac{40095}{6}x^3y^5 + \\ + \frac{44108}{7}x^2y^6 - \frac{237829}{42}xy^7 + \frac{17312}{3}y^8.$$

是 (B_2) 的无切点环綫，并且 $\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=10^{-29}} < 0$.

先証明 $F_1 = 10^{-29}$ 在 $r = 10^{-14}$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$，内有唯一的单閉的实分支. $F_1 = x^2 + y^2 + \Phi_1(x, y)$，如果化成极坐标 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，

$$|\Phi_1(r\cos\theta, r\sin\theta)| < 28\cdot 10^4 r^3(1 + r + \cdots + r^5),$$

因 Φ_1 中的最大係数 $< 10^4$ 而其項数是 30. 对于任意的 θ，

$$F_1(r\cos\theta, r\sin\theta) > r^2 - 30\cdot 10^4 r^3(1 + r + \cdots + r^5),$$

$$F_1(10^{-14}\cos\theta, 10^{-14}\sin\theta) > 10^{-28}(1 - 28\cdot 10^{-10}(1 + 10^{-14} + \cdots + 10^{-70})) > 10^{-29},$$

但是 $F_1(0, 0) = 0$，故 $F_1(x, y) - 10^{-29} = 0$ 有实的分支. 对于同一个 θ，$0 \leqslant r_1 < r_2 < 10^{-14}$，

$$F_1(r_2\cos\theta, r_2\sin\theta) - F_1(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta) > (r_2 - r_1)(r_2 + r_1 - 28\cdot 10^4 \sum_{3\leqslant i+j\leqslant 8} r_1^i r_2^j),$$

当 r_2 以 10^{-14} 来代替时，

$$r_2 + r_1 - 28\cdot 10^4 \sum_{3<i+j<8} r_1^i r_2^j > r_1 + r_2 - 33\cdot 30\cdot 10^4 r_2^2(1 + r_2 + \cdots + r_2^5)$$

$$> r_1 + r_2 - 10^8 r_2^2 > r_2(1 - 10^8\cdot r_2) + r_1 > 0.$$

故对同一个 θ 只可能有 r 唯一的一个解，因此 $F_1 = 10^{-29}$ 在 $r = 10^{-14}$ 內有唯一的单閉分支.

我們再来証明 $\left.\dfrac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=10^{-29}} < 0$.

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial x}(-y+2xy-y^2+\lambda x+\delta xy) + \frac{\partial F_1}{\delta y}(x+x^2-5xy-y^2+\lambda y-\varepsilon xy)$$

$$= -\frac{13499}{14}(x^8 + y^8) + \frac{\partial f_{18}}{\partial x}(2xy - y^2) + \frac{\partial f_{18}}{\partial y}(x^2 - 5xy - y^2) +$$

$$+ \lambda\left(x\frac{\partial F_1}{\partial x} + y\frac{\partial F_1}{\partial y}\right) + \delta xy\frac{\partial F_1}{\partial x} - \varepsilon xy\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$= -\frac{13499}{14}(x^8 + y^8) + \Psi_1(x, y).$$

在 $F_1 = 10^{-29}$ 上因

$$r^2(1 - 50\cdot 10^4(r + \cdots + r^6)) < F_1 = 10^{-29} < r^2(1 + 50\cdot 10^4(r + \cdots + r^6)),$$

故

$$10^{-15} < r < 10^{-14}.$$

$\dfrac{\partial f_{18}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_{18}}{\partial y}$ 中係数之和 $< 8\cdot 10^4$，故对于任意的 θ

$$\left|\frac{\partial f_{18}}{\partial x}\right| < 8\cdot 10^4 r^7, \qquad \left|\frac{\partial f_{18}}{\partial y}\right| < 8\cdot 10^4 r^7,$$

$$\left|\frac{\partial f_{18}}{\partial x}(2xy - y^2) + \frac{\partial f_{18}}{\partial y}(x^2 - 5xy - y^2)\right| < 8\cdot 10^4 r^7\cdot 10 r^2 = 8\cdot 10^5 r^9.$$

$\dfrac{\partial F_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ 的項数是 29，其中最大者的係数 $< 10^5$，

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| < 29\cdot 10^5(r + r^2 + \cdots + r^7),$$

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial y}\right| < 29\cdot 10^5(r + r^2 + \cdots + r^7),$$

$$\left|\lambda\left(x\frac{\partial F_1}{\partial x} + y\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right| < 10^{-820}\cdot 10^6 r^2(1 + \cdots + r^6),$$

$$\left|\delta xy\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| < 10^{-263}\cdot 29\cdot 10^5 r^3(1 + \cdots + r^6),$$

$$\left|\varepsilon xy\frac{\partial F_1}{\partial y}\right| < 10^{-71}\cdot 29\cdot 10^5 r^3(1 + \cdots + r^6).$$

$$|\Psi_1(r\cos\theta, r\sin\theta)| < 8\cdot 10^5\cdot 10^{-126} + 10^{-814}\cdot 10^{-28}(1 + \cdots + 10^{-84}) +$$

$$+ 10^{-258}\cdot 29\cdot 10^{-42}(1 + \cdots + 10^{-84}) +$$

$$+ 10^{-78} 29\cdot 10^{-42}(1 + \cdots + 10^{-84}).$$

$$\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=10^{-29}} < -\frac{13499}{14}\left(\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{2}}\right)^4 + |\Psi_1| < -10^2\cdot 10^{-120} + |\Psi_1| <$$

$$<-10^{118}\left(1-\frac{8}{1000}-\frac{1}{10^{738}}\right)-\left(\frac{29}{10^{196}}+\frac{29}{100}\right)\left(1+\cdots+\frac{1}{10^{84}}\right)<0.$$

令

$$F_2=f_{22}+f_{23}+f_{33}+f_{34}+f_{35}+f_{36}=10^{-181}$$

其中

$$f_{22}=x^2+y^2,$$

$$f_{23}=\frac{2}{3}x^3-2xy^2+\frac{2}{3}(6+\varepsilon)y^3,$$

$$f_{24}=-2(5+\varepsilon)xy^3+\frac{(5+\varepsilon)(6+\varepsilon)}{2}y^4,$$

$$f_{25}=\frac{4}{15}\alpha_1(1+3\alpha_1-3\alpha_2)x^5+\frac{2}{3}\alpha_1(4+3\alpha_1-3\alpha_2)x^3y^2+$$

$$+2\alpha_1x^2y^3+2\alpha_1(1-\alpha_2)xy^4+\frac{2\alpha_1}{5}(\alpha_1\alpha_2+1)y^5=$$

$$=\left(\frac{4}{3}+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\right)x^5+\left(\frac{10}{3}+\varepsilon\beta_2(\varepsilon)\right)x^3y^2+(10+\varepsilon\beta_3(\varepsilon))x^2y^3-$$

$$-(50+\varepsilon\beta_4(\varepsilon))xy^4+(62+\varepsilon\beta_5(\varepsilon))y^5,$$

其中 $\alpha_1=5+\varepsilon$, $\alpha_2=6+\varepsilon$, $\beta_1(\varepsilon),\cdots,\beta_5(\varepsilon)$ 是 ε 的多項式;

$$f_{26}=\frac{1}{10}\left(-\frac{10}{3}\alpha_1+2\alpha_1\alpha_2-\frac{46}{3}\alpha_1^2+4\alpha_1^2\alpha_2-2\alpha_1^3\right)x^5y+(-8\alpha_1+6\alpha_1\alpha_2-3\alpha_1^2)x^4y^2+$$

$$+\frac{1}{6}\left(-\frac{11}{3}\alpha_1-2\alpha_1\alpha_2-\frac{35}{3}\alpha_1^2+22\alpha_1^2\alpha_2-\alpha_1^3\right)x^3y^3+\left(-\frac{22}{3}\alpha_1+6\alpha_1\alpha_2-\frac{11}{2}\alpha_1^2\right)x^2y^4+$$

$$+\frac{1}{10}\left(\frac{10}{3}\alpha_1+\frac{46}{3}\alpha_1^2-24\alpha_1^2\alpha_2+2\alpha_1^3\right)xy^5+\left(\frac{28}{3}\alpha_1-8\alpha_1\alpha_2+9\alpha_1^2-2\alpha_1^2\alpha_2\right)y^6$$

$$=\left(-\frac{44}{3}+\frac{98}{30}\varepsilon+\frac{1}{10}\varepsilon^2\right)\varepsilon x^5y+(-10+\varepsilon\gamma_1(\varepsilon))x^4y^2+\left(\frac{10}{3}+\varepsilon\gamma_2(\varepsilon)\right)x^3y^3+$$

$$+\left(\frac{445}{6}+\varepsilon\gamma_3(\varepsilon)\right)x^2y^4+(-260+\varepsilon\gamma_4(\varepsilon))xy^5+\left(\frac{4555}{18}+\varepsilon\gamma_5(\varepsilon)\right)y^6,$$

其中 $\gamma_1(\varepsilon),\gamma_2(\varepsilon),\cdots,\gamma_5(\varepsilon)$ 是关于 ε 的多項式.

在 $r=10^{-90}$ 圓內 F_2 起决定性作用的項是 x^2+y^2,故与 F_1 相同的証明可得出 $F_2=10^{-181}$ 在 $r=10^{-90}$ 內有唯一的单閉分支.

我們来証明 $\left.\frac{dF_2}{dt}\right|_{F_2=10^{-181}}>0$.

$$\frac{dF_2}{dt}=\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial F_2}{\partial x}(-y+2xy-y^2+\lambda x-2\delta xy)+$$

$$+\frac{\partial F_2}{\partial y}(x-(5+\varepsilon)xy-y^2+\lambda y)=\left(-\frac{44}{3}+\frac{98}{30}\varepsilon+\frac{1}{10}\varepsilon^2\right)\varepsilon(x^6+y^6)+$$

$$+\frac{\partial f_{26}}{\partial x}(2xy-y^2)+\frac{\partial f_{26}}{\partial y}(x^2-(5+\varepsilon)xy-y^2)+\lambda\left(x\frac{\partial F_2}{\partial x}+y\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)+\delta xy\frac{\partial F_2}{\partial x}=$$

$$=\left(-\frac{44}{3}+\frac{98}{30}\varepsilon+\frac{1}{10}\varepsilon^2\right)\varepsilon(x^6+y^6)+\Psi_2(x,y),$$

$$|\Psi_2(x,y)| < \left|\frac{\partial f_{26}}{\partial x}(2xy-y^2)+\frac{\partial f_{26}}{\partial y}(x^2-(5+\epsilon)xy-y^2)\right| + $$

$$+\left|\lambda\left(x\frac{\partial F_2}{\partial x}+y\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\right|+\left|\delta xy\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|$$

$$\left|\frac{\partial f_{26}}{\partial x}\right|<10^4 r^5,\qquad \left|\frac{\partial f_{26}}{\partial y}\right|<10^4\cdot r^5,$$

$$\left|\frac{\partial f_{26}}{\partial x}(2xy-y^2)+\frac{\partial f_{26}}{\partial y}(x^2-(5+\epsilon)xy-y^2)\right|<10^5 r^7.$$

又 $\dfrac{\partial F_2}{\partial x},\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}$ 的項数 <13，其最大的係数 $<10^3$，

$$\left|\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|<13\cdot 10^3 r(1+r+\cdots+r^4),\quad \left|\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|<13\cdot 10^3 r(1+r+\cdots+r^4).$$

在 $F_2=10^{-181}$ 上 $10^{-91}<r<10^{-90}$，代入 $\epsilon=-10^{-71}$，

$$\frac{dF_2}{dt}>\left(\frac{44}{3}-\frac{98}{30}10^{-78}-\frac{1}{10}10^{-156}\right)10^{-71}\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}}\right)^3-|\Psi_2|$$

$$|\Psi_2|<10^5\cdot(10^{-90})^7+10^{-820}\cdot 10^4\cdot 10^{-180}(1+\cdots)+10^{-350}\cdot 13\cdot 10^3(10^{-90})^4\left(1+\cdots+\frac{1}{10^{360}}\right).$$

$$\left.\frac{dF_2}{dt}\right|_{F_2=10^{-181}}>10^{-617}\left(\frac{440}{30}-\frac{98}{30}\frac{1}{10^{78}}-\frac{1}{10^{157}}-\frac{1}{10^{8}}-\frac{13}{10^{8}}-\frac{1}{10^{137}}\left(1+\cdots+\frac{1}{10^{363}}\right)\right)>0$$

令 $F_3=f_{32}+f_{33}+f_{34}=10^{-542}$，其中

$$f_{32}=x^2+y^2,$$

$$f_{33}=\frac{2}{3}(1+\delta)x^3-2xy^2+\frac{2}{3}(6+\epsilon)y^3,$$

$$f_{34}=\frac{6\delta+2\delta^2}{4}x^4+\frac{\delta}{3}x^3y-\left(\frac{\delta}{3}+2(5+\epsilon)\right)xy^3-\frac{\delta+(6+\epsilon)(5+\epsilon)}{2}y^4.$$

很容易証明 $F_3=10^{-542}$ 在 $r=10^{-271}$ 圓內有唯一的单閉的实分支，因这时它与 $x^2+y^2=10^{-542}$ 相差很少。

$$\frac{dF_3}{dt}=\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\delta}{3}(x^4+y^4)+\frac{\partial f_{34}}{\partial x}((2+\delta)xy-y^2)+$$

$$+\frac{\partial f_{34}}{\partial y}(x^2-(5+\epsilon)xy-y^2)+\lambda\left(x\frac{\partial F_3}{\partial x}+y\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\delta}{3}(x^4+y^4)+\Psi_3(x,y),$$

$$|\Psi_3|<\left|\frac{\partial f_{34}}{\partial x}((2+\delta)xy-y^2)+\frac{\partial f_{34}}{\partial y}(x^2-(5+\epsilon)xy-y^2)\right|+\left|\lambda\left(x\frac{\partial F_3}{\partial x}+y\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)\right|<$$

$$<10r^5+2\cdot 10^2|\lambda|r^2(1+r+r^2).$$

在 $F_3=10^{-542}$ 上有 $10^{-272}<r<10^{-271}$，

$$\left.\frac{dF_3}{dt}\right|_{F_3=10^{-542}}<-\frac{10^{-263}}{3}\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}}\right)^2+|\Psi_3|$$

$$<-10^{-1351}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{2}{10^9}(1+\cdots)\right)<0.$$

再令　$F_4 = x^2 + y^2 = 10^{-1801}$,

$$\frac{dF_4}{dt} = \lambda(x^2 + y^2) + 2x(2xy - y^2) + 2y(x^2 - 5xy - y^2) + 2(\delta x^2 y - \varepsilon xy^2),$$

在　$F_4 = 10^{-1801}$ 上 $10^{-901} < r < 10^{-900}$,

$$\left.\frac{dF_4}{dt}\right|_{F_4=10^{-1801}} > \lambda r^2 - 20r^3 - 2(|\delta| + |\varepsilon|)r^3 >$$

$$> 10^{-820}\cdot 10^{-1802} - 20\cdot 10^{-900}\cdot 10^{-1800} - 2(10^{-71} + 10^{-263})10^{-900}\cdot 10^{-1800} =$$

$$= 10^{-2622}\left(1 - \frac{20}{10^{88}} - \frac{2}{10^{88}}(10^{-71} + 10^{-263})\right) > 0.$$

因此得

$$\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=10^{-29}} < 0, \qquad \left.\frac{dF_2}{dt}\right|_{F_2=10^{-181}} > 0, \qquad \left.\frac{dF_3}{dt}\right|_{F_3=10^{-542}} < 0,$$

$\left.\frac{dF_4}{dt}\right|_{F_4=10^{-1801}} > 0$, 故在 $x = 0, y = 0$ 的附近如果沒有其它的奇点时就証明出現三个极限环綫，并且恰恰只有三个.

(A_2) 的奇点是联立方程

$$\begin{cases} -y + 2xy - y^2 = 0, \\ x + x^2 - 5xy - y^2 = 0 \end{cases} \qquad (C_2)$$

的解，它們都是 $x = 0,\ y = 0$; $x = -1,\ y = 0$; $x = \frac{5 - \sqrt{24}}{13},\ y = \frac{-3 - 2\sqrt{24}}{13}$

及 $x = \frac{5 + \sqrt{24}}{13},\ y = \frac{-3 + 2\sqrt{24}}{13}$.

因此除原点外其余三个奇点全在 $r = \frac{1}{2}$ 之外.

(B_2) 的奇点是联立方程

$$\begin{cases} -y + 2xy - y^2 + \lambda x + \delta xy = 0, \\ x + x^2 - 5xy - y^2 + \lambda y - \varepsilon xy = 0 \end{cases} \qquad (D_2)$$

的解. (D_2) 的解看成两条曲綫的交点，因为 $\lambda, \delta, \varepsilon$ 都很小，故 (C_2) 的两条曲綫的交点应当与 (D_2) 的相差很微，(D_2) 的四个奇点除 $(0, 0)$ 外应当全在 $r = 10^{-14}$ 之外. 詳細証明如下:

(D_2) 可写成

$$\begin{aligned} &\lambda x - y + (2 + \delta)xy - y^2 = 0, \\ &x + \lambda y + x^2 - (5 + \varepsilon)xy - y^2 = 0. \end{aligned} \qquad (D_2)$$

在 (D_2) 中消去 x, 从第一式中解出

$$x = \frac{y + y^2}{\lambda + (2 + \delta)y}$$

代入第二式以 $\alpha = 5 + \varepsilon,\ \beta = 2 + \delta$ 整理之得

$$(1 - \beta\alpha - \alpha^2)y^2 + (\alpha + 2 - \beta\alpha + \lambda\alpha^2 - \beta\lambda)y^2 +$$
$$+ (\alpha + 1 + \lambda + 2\alpha\lambda^2 - \beta\lambda - \lambda^2)y + \lambda + \lambda^2 = 0,$$

或

$$(-13+\Delta_1)y^3+(-6+\Delta_2)y^2+(3+\Delta_3)y+\lambda+\lambda^3=0,$$

其中 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ 是关于 ϵ,δ,λ 的多項式,其最低次項是一次的. 可以驗証它的三个根分别位于下面三个区間: $(\lambda,0)$, $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{13},\frac{10}{13}\right)$. 在 $-1\leqslant y\leqslant-\frac{1}{2}$ 中 $\frac{dx}{dy}\neq0$, 故 x 的値介于最大最小値之間，故位于 $\left(\frac{1}{4},1\right)$; 在 $-1\leqslant y\leqslant-\frac{1}{2}$ 时 x 位于 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

又从 (D_2) 中消去 y, 解出

$$y=\frac{-(\lambda-1)x+x^2}{(7+\delta+\epsilon)x-(1+\lambda)}.$$

代入 (D_2) 中的第一式得

$$(-13+\Delta_1')x^3+(-3+\Delta_2')x^2+(9+\Delta_3')x+(-1+\Delta_4')=0,$$

其中 $\Delta_i'(i=1,2,3,4)$ 是关于 ϵ,δ,λ 的多項式其最低次項是一次的. 由上面我們已知它的两个根分别位于 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4},1\right)$ 区間之中,故由根与係數的关系知第三个根必然位于 $\left(-\frac{15}{13},-\frac{1}{2}\right)$ 之中因此三个奇点各位于

$$-\frac{15}{13}<x<-\frac{1}{2},\quad -\lambda<y<0;$$

$$0<x<\frac{1}{4},\quad -1\leqslant y\leqslant-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4}<x<1,\quad -\frac{1}{13}\leqslant y\leqslant\frac{10}{13}$$

全在 $r=10^{-14}$ 之外.

§4. 方向場的旋轉

由方程

$$\frac{dx}{dt}=P,\qquad \frac{dy}{dt}=Q$$

所定义的方向場,如果旋轉 α 角度,它可以用下面方程給出:

$$\frac{dx}{dt}=P\cos\alpha-Q\sin\alpha,$$
$$\frac{dy}{dt}=P\sin\alpha+Q\cos\alpha. \qquad (E_2)$$

将方程 (B_2) 所定义的方向場轉 α 角度，如果旋轉以后的方程的第一次近似出現中心时，則 (B_2) 中最靠近原点的极限环綫消逝了，并且在其它的地方也不会再出現另外的极限环否則,如果跳出其他极限环,則必为偶重的,再經旋轉卽破为两个极限环,这时将出現四个极限环，这与不多于三个极限环的定理矛盾了，因此如果 (B_2) 的其它两个极限环不因此而碰上,則轉后的方程就有且仅有两个极限环綫.

(B_2) 的第一次近似方程

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \lambda y,$$

經过旋轉得

$$\frac{dx}{dt} = (\lambda\cos\alpha - \sin\alpha)x - (\cos\alpha + \lambda\sin\alpha)y,$$

$$\frac{dy}{dt} = (\lambda\sin\alpha + \cos\alpha)x + (\lambda\cos\alpha - \sin\alpha)y.$$

当

$$\lambda\cos\alpha - \sin\alpha = 0, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \lambda,$$

就出現中心．換言之，如果方向場轉 $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\lambda$ 角度，(B_2) 的一个极限环綫消逝了．如果我們能証明 § 3 中 $F_2 = 10^{-181}$ 由 (E_2) 构成的导数 $\frac{dF_2}{dt}$ 与由 (B_2) 构成者符号相同时，則說明 (B_2) 的其乜两个极限环沒有碰上．

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(P\cos\alpha - Q\sin\alpha) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(P\sin\alpha + Q\cos\alpha) =$$

$$= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}P + \frac{\partial F_2}{\partial y}Q\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}P - \frac{\partial F_2}{\partial x}Q\right)\sin\alpha =$$

$$= \cos\alpha\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}P + \frac{\partial F_2}{\partial y}Q + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}P - \frac{\partial F_2}{\partial x}Q\right)\operatorname{tg}\alpha\right]$$

其中 $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha = \lambda$. 又

$$\left|\frac{\partial F_2}{\partial y}P - \frac{\partial F_2}{\partial x}Q\right| < 1 \qquad (\text{在 } F_2 = 10^{-181})$$

故

$$\frac{dF_2}{dt} > \cos\alpha\left[10^{-617}\left(\frac{440}{30} - \frac{98}{30}\frac{1}{10^{78}} - \frac{1}{10^{157}} - \frac{1}{10^{8}} - \frac{13}{10^3} - \frac{1}{10^{437}}\left(1 + \cdots + \frac{1}{10^{360}}\right) - \right.\right.$$
$$\left. - 10^{-820}\right] > 0.$$

因此如果

$$P = \lambda x - y + (2+\delta)xy - y^2,$$
$$Q = x + \lambda y + x^2 - (5+\varepsilon)xy - y^2$$
$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\lambda, \quad \lambda = 10^{-820},$$

則 (E_2) 有且仅有两个极限环綫．

§5. 結 束 語

秦元勳在[4]中証明过如果 $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$，$P$、$Q$ 为二次多項式出現二次代数极限环綫时則只有一个极限环，在該文中也給出了例子．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x+y-2)(2x+y)}{6x^2 + 11xy + 5y^2 - 16x - 12y + 6}.$$

具有二次代数极限环綫

$$4x^2+8xy+5y^2-16x-16y+12=0,$$

它是唯一的一个极限环綫.

因此合併§3及§4之結果我們得到了 $\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}$, P, Q 为二次多項式在平面上有且仅有一个,二个和三个极限环的例子.

由上面的作法我們还可以看出下面的結論

定理：方程

$$\frac{dx}{dt}=P,\qquad \frac{dy}{dt}=Q$$

其中 P, Q 为关于 x, y 的二次多項式出現中心的充要条件是 $D_1=D_2=D_3=D_4=0$, D_i 是第 i 个焦点量.

証明. 必要性：是中心則所有 D_i 应当为零.

充分性：如果不是所有的 $D_i=0$, 設如 $D_5\neq 0$, 則按§3中的作法就一定可以作出四个极限环綫,这是不可能的.

参　考　文　献

[1] Ландис Е. М. и Петровский И. Г. О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q—многочлены 2-N степен. мат. сборник, т. 37 (2) (1955).

[2] Баутин Н. Н., О числе предельных циклов, появляющихся при изменения коэффицитов из состояния равновесия типа фокуса или центра. *Мат. сборник*, т. 30 (1—2) (1955).

[3] Frömmer M., Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integral kurven) in der Umgebung rationaler Un bestimm theitss tellen. *Math. Annalen*, Band 109 (1933—1934).

[4] 秦元勳,具有二次代数极限环綫之方程,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sum\limits_{0\leq i+j\leq 2} a_{ij}x^iy^j}{\sum\limits_{0\leq i+j\leq 2} b_{ij}x^iy^j},$$

科学記录,第二卷 (1957).

CONCRETE EXAMPLES OF EXISTENCE OF THREE LIMIT CYCLES FOR THE SYSTEM

$$\frac{dx}{dt} = X_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y_2(x, y)$$

CHIN YUAN-SHUN *et al.*
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Method of construction of concrete examples for existence of limit cycles for the system

$$\frac{dx}{dt} = X_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y_2(x, y),$$

where $X_2(x,y)$ and $Y_2(x, y)$ are polynomials of x and y of second degree is given. Based on this method a concrete example is given as follows:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y + (2 + \delta)xy - y^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \lambda y + x^2 - (5 + \varepsilon)xy - y^2,$$

where $\lambda = 10^{-820}$, $\delta = -10^{-350}$, $\varepsilon = -10^{-78}$, and it is shown that this system possesses three limit cycles around the origin $(0, 0)$, hence also on the whole xy plane. Furthermore, it is shown that by rotating the vector field an angle $\alpha = \tan^{-1} \lambda$, the resulting system possesses two and only two limit cycles on the whole xy plane.

数学学报編輯委員会

华罗庚(主任)	陈建功	申又根	段学复
张禾瑞	苏步青	江泽涵	赵訪熊
周培源	关肇直	李　儼	許宝騄
李国平	王湘浩	柯　召	曾远荣
秦元勳	吳大任	王寿仁	蔣碩民

数学学报　第9卷　第2期

Acta Mathematica Sinica, Vol. 9, No. 2

（季　刊）

編輯者	中国数学会
出版者	科学出版社
印刷者	商务印书館上海印刷厂
总发行处	上海市报刊发行处
訂购处	全国各地邮局
代訂另售处	全国各地新华书店 本社各地門市部

（沪）道：1— 952
报：1—2,167

1959年6月出版
（延至7月出版）

本期定价：道林本2.60元
报紙本1.80元

本刊代号：道4—32
报4—33